

*Квазичастицы
в сверхпроводниках:
Уравнения Боголюбова*

4 марта, 15.00

А.С.Мельников

- ◆ Электроны и дырки в нормальном металле и в сверхпроводнике. Качественная картина.
- ◆ Гамильтониан БКШ
- ◆ Эффективный гамильтониан. Преобразование Боголюбова-Валатина
- ◆ Неоднородные сверхпроводящие состояния. Уравнения Боголюбова-де Жена. Функции Грина. Уравнения Горькова.
- ◆ Андреевское отражение. Транспорт заряда и тепла.
- ◆ Андреевские ямы, волноводы, интерферометры.
- ◆ Джозефсоновские системы. Связанные состояния. Ток.
- ◆ Вихри

21 августа 2009 г.: 100 лет д.р.

Н.Н.Боголюбова



**Теория сверхпроводимости 1957-
БКШ**

**Слабо
взаимодействующий
Бозе-газ 1947 -ННБ**

**Уравнения для электронов и
дырок в сверхпроводниках
1958- 1959-ННБ**

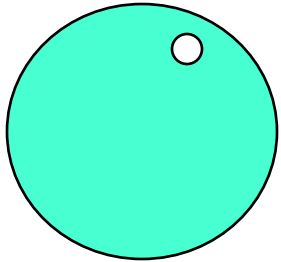
Уравнения Горькова 1958

Андреевское отражение 1964

Электронны и дырки в нормальном металле

Дырки

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \approx V_F (k_F - k)$$

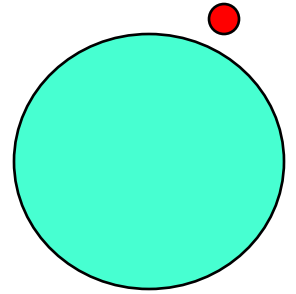


$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) v = \varepsilon v$$

$$u = 0$$

Электронны

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \approx V_F (k - k_F)$$



Ферми-жидкостные

эффекты: $\varepsilon = V_F^* |k - k_F|$

Уравнение Шредингера:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) u = \varepsilon u$$

$$v = 0$$

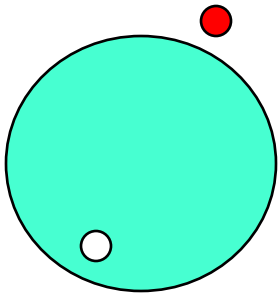
Электроны и дырки в нормальном металле

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_k^+ | 0 \rangle \neq 0$$

- вероятность рассеяния электрона из состояния $|\hat{a}_k^+|0\rangle$ в состояние $|\hat{a}_q^+|0\rangle$

Электроны и дырки в сверхпроводнике. Аномальные средние.

$$\langle 0 | \hat{a}_q^+ \hat{a}_k^+ | 0 \rangle \neq 0 \quad - \text{вероятность рассеяния электрона из состояния } |\hat{a}_k^+|0\rangle \text{ в дырочное состояние } |\hat{a}_q|0\rangle$$



2 связанных уравнения Шредингера = уравнения Боголюбова

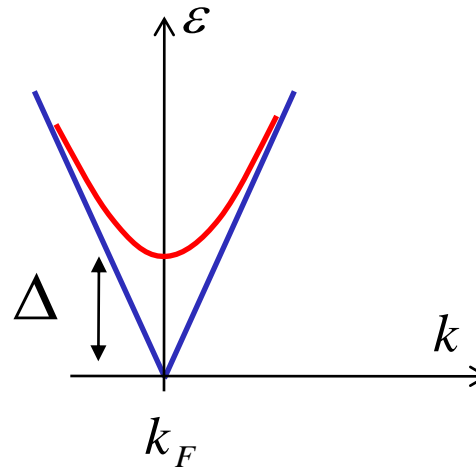
$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) u + \Delta v &= \varepsilon u \\ \left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) v + \Delta u &= \varepsilon v \end{aligned}$$

Однородное сверхпроводящее состояние:

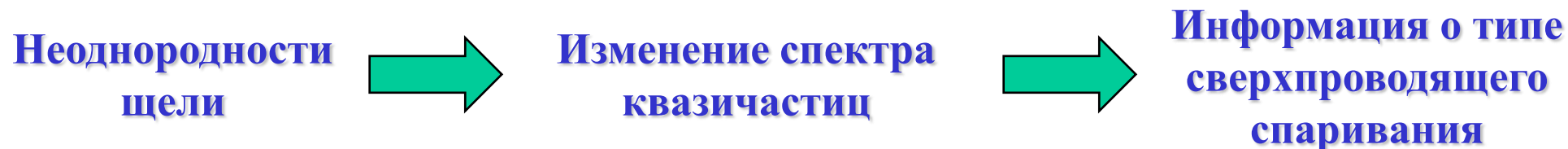
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\Delta^2 + (\hbar V_F (k - k_F))^2}$$

Сверхпроводящая щель




Низкие температуры: в однородном сверхпроводнике с изотропной щелью квазичастиц нет



Эксперименты: туннельная спектроскопия, теплопроводность, теплоемкость, поглощение ЭМ волн, спиновая восприимчивость,

Кое-какие «мелочи»:

*магнитное поле, фаза параметра порядка,
калибровочная инвариантность, потенциальное
рассеяние на неоднородностях, границах, спин*


$$\left(-\frac{\hbar^2 \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$
$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$

*Еще кое-какие «мелочи»:
Что такое оператор дельта?*

*Ответ 1: дельта – это именно тот параметр
порядка, который появляется в теории типа
Гинзбурга-Ландау*

*Ответ 2: дельта – это самосогласованное поле
куперовских пар*

*Ответ 3: дельта – это вообще-то нелокальный
оператор*

$$\hat{\Delta}u = \int \Delta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) u(\vec{r}_2) d\vec{r}_2$$

Модель БКШ

$$\hat{H} = \sum \hbar V_F (k - k_F) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} + g \sum a_{q\uparrow}^+ a_{-q\downarrow}^+ a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow}$$

Коммутационные соотношения $\{a_{k\sigma}^+ a_{q\beta}\} = \delta_{kq} \delta_{\sigma\beta}$

Метод среднего поля

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum \hbar V_F (k - k_F) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} \\ & + g \sum \langle a_{q\uparrow}^+ a_{-q\downarrow}^+ \rangle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \\ & + g \sum a_{q\uparrow}^+ a_{-q\downarrow}^+ \langle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \rangle \\ & - g \sum \langle a_{q\uparrow}^+ a_{-k\downarrow} \rangle a_{-q\downarrow}^+ a_{k\uparrow} + g \sum a_{q\sigma}^+ a_{k\sigma} \langle a_{-q-\sigma}^+ a_{-k-\sigma} \rangle \end{aligned}$$

Эффективный гамильтониан

$$\hat{H} = \sum \hbar V_F (k - k_F) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} + \sum \Delta^* a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} + \sum a_{q\uparrow}^+ a_{-q\downarrow}^+ \Delta$$

Уравнение самосогласования

$$g \sum_k \langle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \rangle = \Delta$$

Преобразование Боголюбова-Валатина

$$a_{k\uparrow} = u_{k\uparrow} \alpha_{k\uparrow} + v_{k\uparrow}^* \alpha_{-k\downarrow}^+$$

$$a_{k\uparrow}^+ = u_{k\uparrow}^* \alpha_{k\uparrow}^+ + v_{k\uparrow} \alpha_{-k\downarrow}$$

$$a_{k\downarrow} = u_{k\downarrow} \alpha_{k\downarrow} - v_{k\downarrow}^* \alpha_{-k\uparrow}^+$$

$$a_{k\downarrow}^+ = u_{k\downarrow}^* \alpha_{k\downarrow}^+ - v_{k\downarrow} \alpha_{-k\uparrow}$$

$$H = U_0 + \sum_{k\sigma} \varepsilon_k \alpha_{k\sigma}^+ \alpha_{k\sigma} \quad \left\{ \alpha_{k\sigma}^+ \alpha_{q\beta} \right\} = \delta_{kq} \delta_{\sigma\beta}$$

$$|u_{k\sigma}|^2 + |v_{k\sigma}|^2 = 1$$

$$\xi_k = \hbar V_F (k - k_F)$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2}$$

$$|v_{k\sigma}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{\varepsilon_k} \right)$$

$$\frac{|g|}{2V} \sum_k \frac{\Delta}{\varepsilon_k} \tanh \frac{\varepsilon_k}{2T} = \Delta$$

Теория Хартри-Фока в сверхпроводниках

Введем полевые операторы: $\Psi_{\sigma}(\vec{r}) = \sum_k e^{i\vec{k}\vec{r}} a_{k\sigma}$

$$\{\Psi_{\sigma}(\vec{r})\Psi_{\beta}^{+}(\vec{r}')\} = \delta_{\sigma\beta}\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \sum \int \Psi_{\sigma}^{+}(\vec{r}) \left(\frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U_0(\vec{r}) - \mu \right) \Psi_{\sigma}(\vec{r}) d^3 r \\ & + g \int \Psi_{\uparrow}^{+}(\vec{r}) \Psi_{\downarrow}^{+}(\vec{r}) \Psi_{\downarrow}(\vec{r}) \Psi_{\uparrow}(\vec{r}) d^3 r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \sum \int \Psi_{\sigma}^{+}(\vec{r}) \left(\frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U(\vec{r}) - \mu \right) \Psi_{\sigma}(\vec{r}) d^3 r \\ & + \int \Psi_{\uparrow}^{+}(\vec{r}) \Psi_{\downarrow}^{+}(\vec{r}) \Delta(\vec{r}) d^3 r + \int \Delta^{*}(\vec{r}) \Psi_{\downarrow}(\vec{r}) \Psi_{\uparrow}(\vec{r}) d^3 r\end{aligned}$$

Каноническое преобразование

$$\Psi_{\uparrow}(\vec{r}) = \sum_n \left(u_n(\vec{r}) \gamma_{n\uparrow} - v_n^*(\vec{r}) \gamma_{n\downarrow}^+ \right) \quad \left\{ \gamma_{n\sigma}^+ \gamma_{m\beta} \right\} = \delta_{nm} \delta_{\sigma\beta}$$

$$\Psi_{\downarrow}(\vec{r}) = \sum_n \left(u_n(\vec{r}) \gamma_{n\downarrow} + v_n^*(\vec{r}) \gamma_{n\uparrow}^+ \right)$$

$$H = E_0 + \sum_{k\sigma} \varepsilon_n \gamma_{n\sigma}^+ \gamma_{n\sigma}$$

$$\left(\hat{H}_0 - \mu \right) u + \Delta v = \varepsilon u$$

$$\left(\mu - \hat{H}_0^* \right) v + \Delta^* u = \varepsilon v$$

Симметрия
решений:

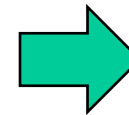
$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, u \rightarrow -v^*, v \rightarrow u^*$$

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda}(\vec{r}) u_{\lambda}^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \int \left(u_{\lambda}(\vec{r}) u_{\nu}^*(\vec{r}) + v_{\lambda}(\vec{r}) v_{\nu}^*(\vec{r}) \right) d^3 r = \delta_{\lambda\nu}$$

$$\sum_{\lambda} v_{\lambda}(\vec{r}) u_{\lambda}^*(\vec{r}') = 0$$

Уравнение самосогласования

$$\Delta(\vec{r}) = g \left\langle \Psi_{\downarrow}(\vec{r}) \Psi_{\uparrow}(\vec{r}) \right\rangle = -g \sum_n u_n v_n^* \tanh \frac{\varepsilon_n}{2T}$$



Вблизи T_c :
уравнение ГЛ

Функции Грина. Уравнения Горькова.

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\lambda} \frac{u_{\lambda}(\vec{r}_1) u_{\lambda}^*(\vec{r}_2)}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}$$

$$F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\lambda} \frac{v_{\lambda}(\vec{r}_1) u_{\lambda}^*(\vec{r}_2)}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}$$

$$\left(\hat{H}_0 - \mu - \varepsilon \right) G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \Delta(\vec{r}_1) F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\left(\mu - \hat{H}_0^* - \varepsilon \right) F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \Delta^*(\vec{r}_1) G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

Методы решения.

$$\left[\begin{array}{l} \left(-\frac{\hbar^2 \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u \\ \left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v \end{array} \right]$$

Масштаб неоднородности
сверхпроводящей щели

$$\xi = \frac{\hbar V_F}{\Delta}$$

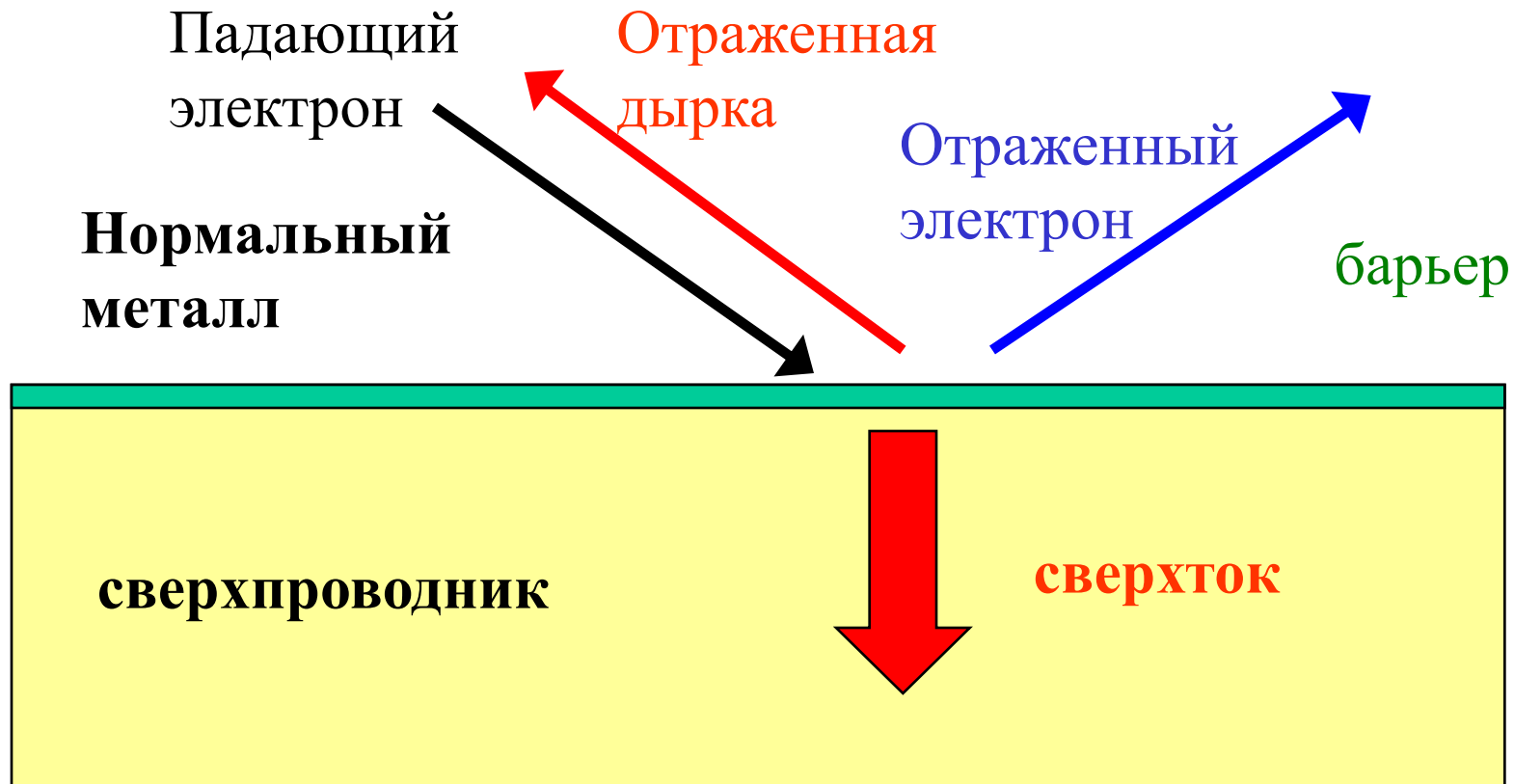
Квазиклассическое приближение:

$$\hat{\Psi} = (u, v) = \hat{\psi} e^{iS} \quad |\nabla S| = k_F \gg \frac{1}{\xi}$$

Квантовая механика электронов и дырок в сверхпроводниках. Некоторые современные направления

- ◆ квантовый транспорт в гибридных системах с андреевским отражением. Андреевские интерферометры. Интерференционные эффекты в системах с примесями
- ◆ Микротория джозефсоновских систем. ВАХ. MAR
- ◆ системы сверхпроводник – ферромагнетик
- ◆ Квазичастицы в сверхпроводниках с анизотропным спариванием. теплоемкость, теплопроводность, связанные состояния на вихрях и дефектах
- ◆ динамика вихрей в сверхпроводниках

Андреевское отражение



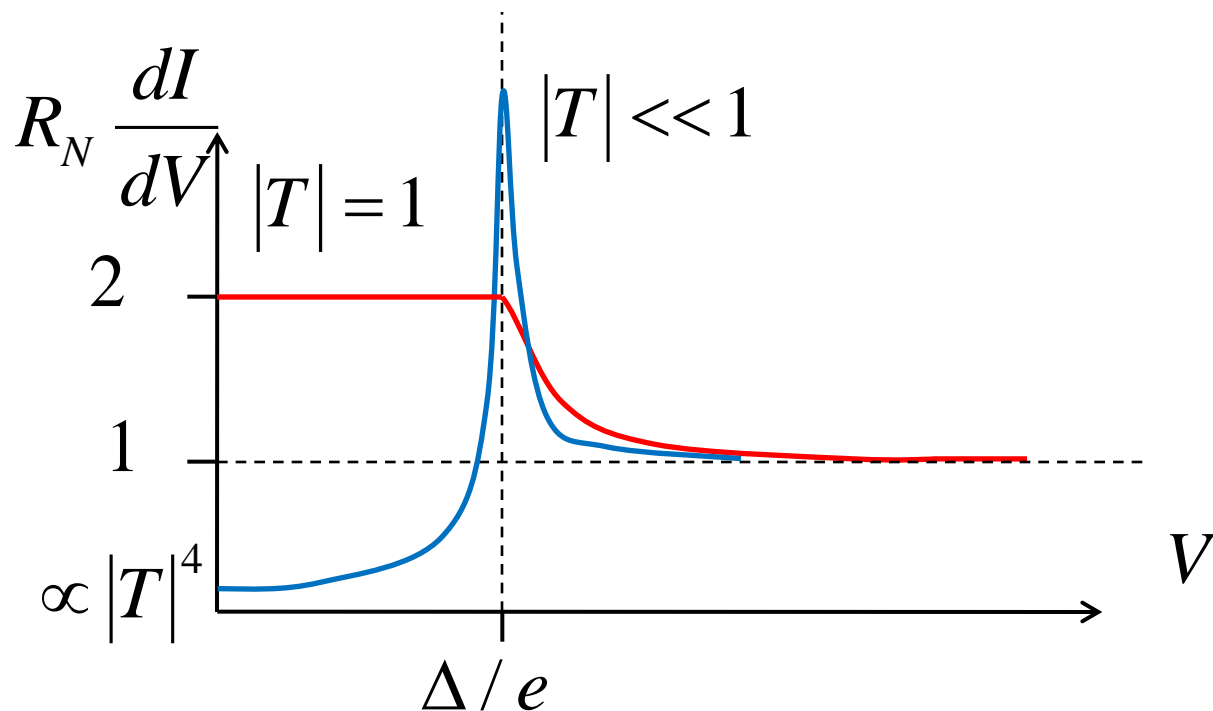
Транспорт тепла. SNSNS структуры – промежуточное состояние (А.Ф.Андреев)

Транспорт заряда. SIN граница. Blonder-Tinkham-Klapwijk.

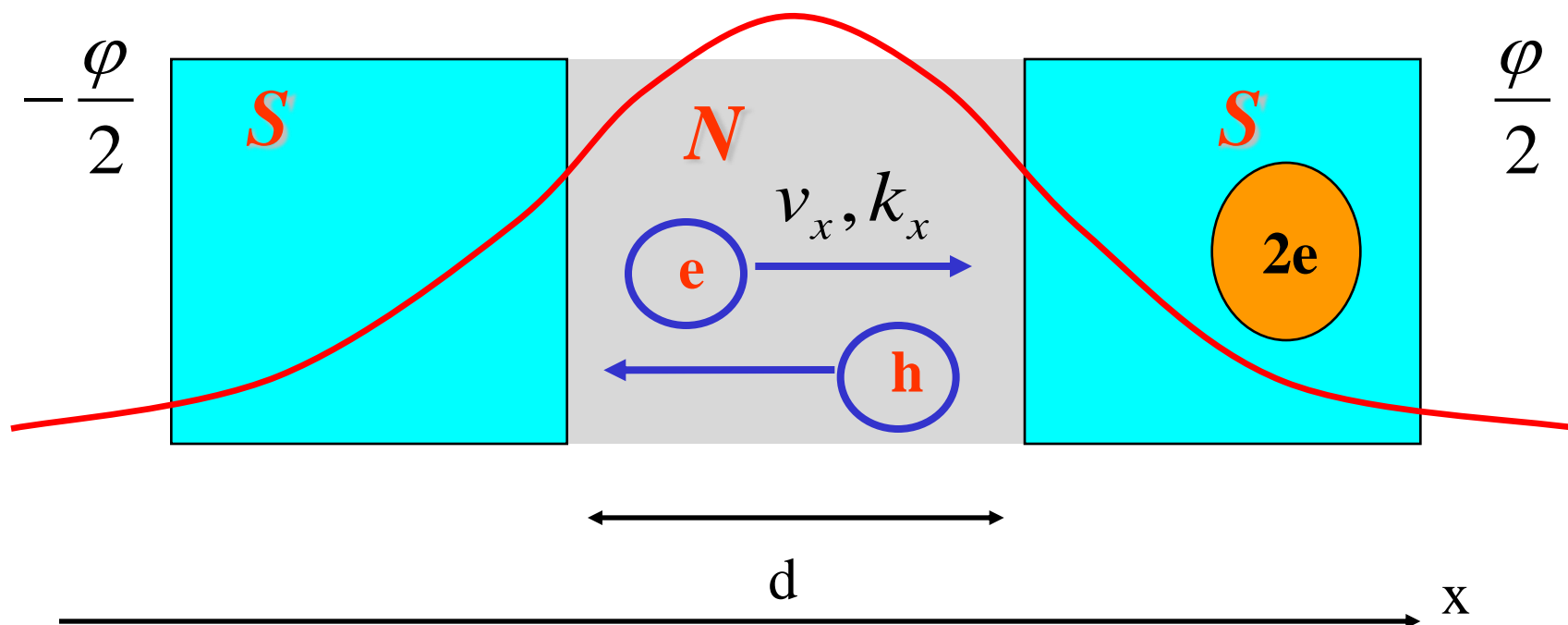
Вопрос: Ток определяется
плотностью состояний?

$$I_{NS}^{\text{qp}} = \frac{1}{eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \times N_s(E) dE, \quad Z^2 \gg 1.$$

Ответ ВТК: только для малой прозрачности границы



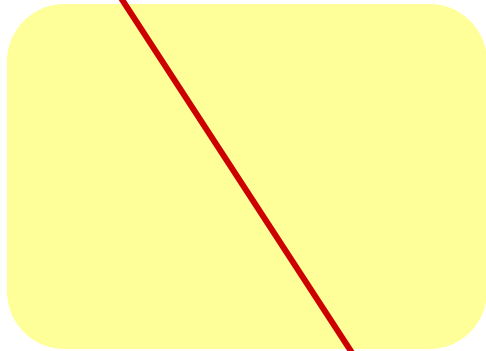
Андреевские связанные состояния



Базовая задача для описания нулевых мод квазичастиц

Разность фаз параметра порядка π

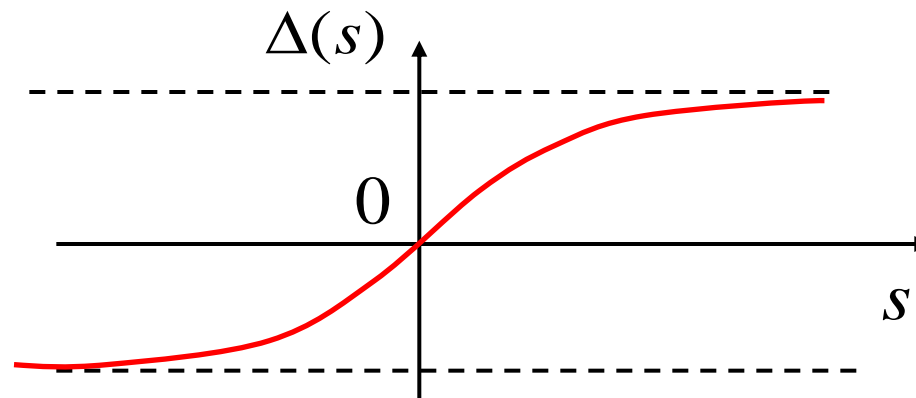
s $\theta = 0$



$\theta = \pi$

$$\hat{H} = -i\hbar V_{\perp} \hat{\sigma}_z \frac{\partial}{\partial s} + \hat{\sigma}_x \operatorname{Re} \Delta(s) - \hat{\sigma}_y \operatorname{Im} \Delta(s, b)$$

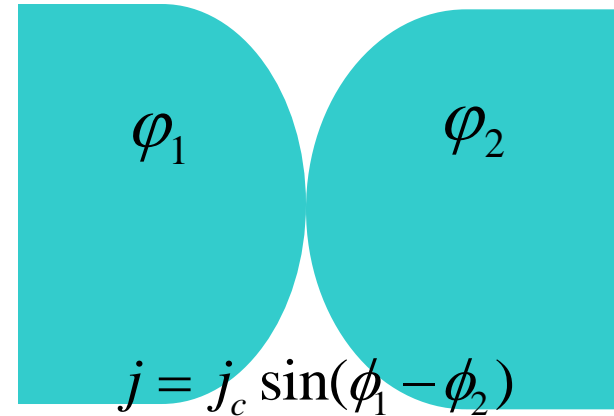
$$\hat{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \exp \left(-\frac{1}{\hbar V_{\perp}} \int_0^s \operatorname{Re} \Delta(t) dt \right)$$



энергия=0

Джозефсоновский транспорт. Андреевские уровни в контактах.

Эффект Джозефсона



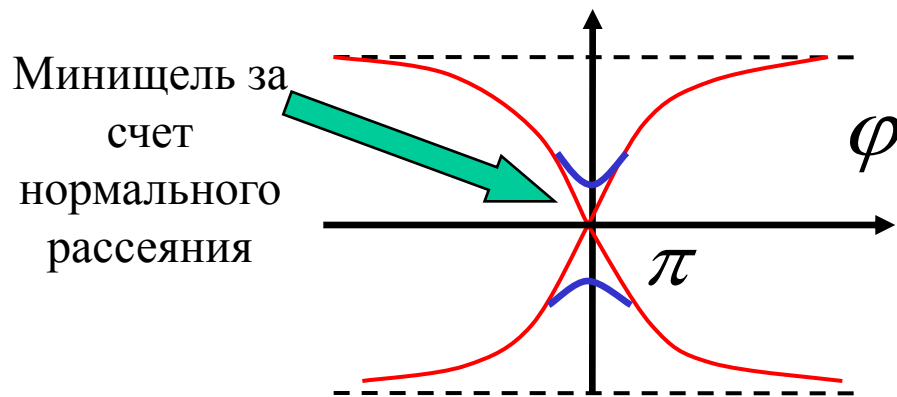
**Вклад подщелевых состояний в
стационарный сверхток:**

$$I^{sg}(\varphi) = -\frac{2e}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} \frac{\partial \varepsilon_n(\varphi)}{\partial \varphi} \tanh \frac{\varepsilon_n(\varphi)}{2T}$$

Вопрос: Ток определяется \sin разности фаз?

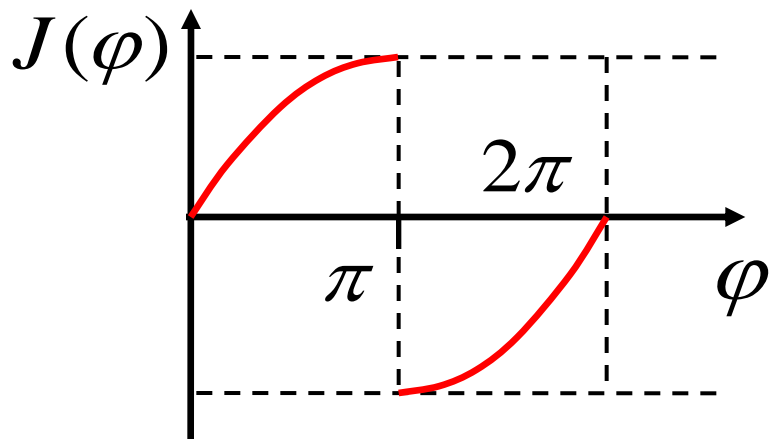
Ответ: только для малой прозрачности границы

Короткий 1-модовый контакт $d \ll \xi$



Спектр
локализованных
состояний

$$E/\Delta = \pm \cos \frac{\varphi}{2}$$



Kulik-Omel'yanchuk 1977

Habercorn et al 1978

Zaitsev 1984

Beenakker 1991

Bagwell 1992

Beenakker-Houten 1991

Длинный 1-модовый контакт. Спектр.

$$d \gg \xi$$

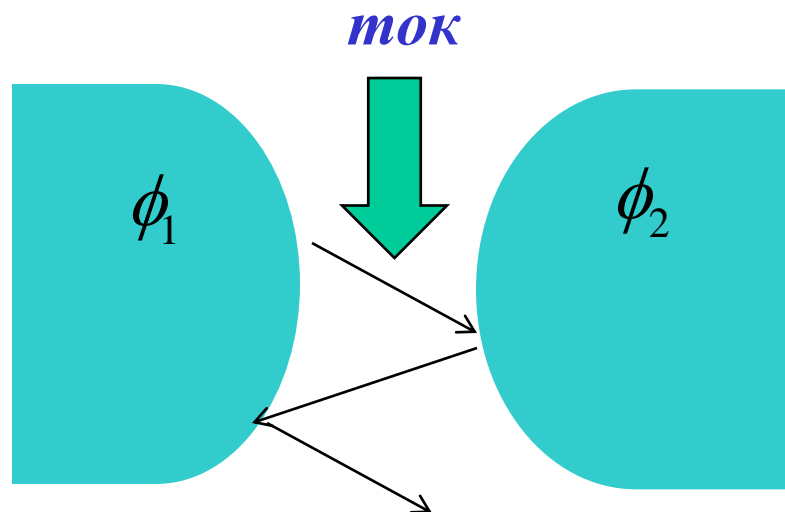
S - N - S

Number of levels $N \sim d\Delta/\hbar v_x$

$$\varepsilon_n(k_r) \approx \frac{(n + 1/2)\pi\hbar v_x}{d}$$

А.Ф.Андреев (1965)

Андреевский интерферометр



$$G = G(\phi_1 - \phi_2)$$

Андреевские уровни в вихрях

◆ Магнитное поле проникает в сверхпроводник в виде вихревых линий

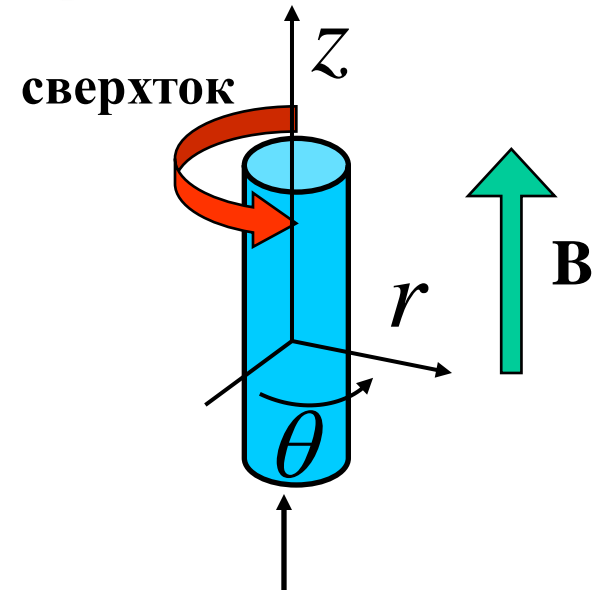
◆ Вихри отталкиваются

◆ Вихрь несет 1 квант магнитного потока

$$\varphi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e}$$

◆ Решетка Абрикосова

Вихревая линия

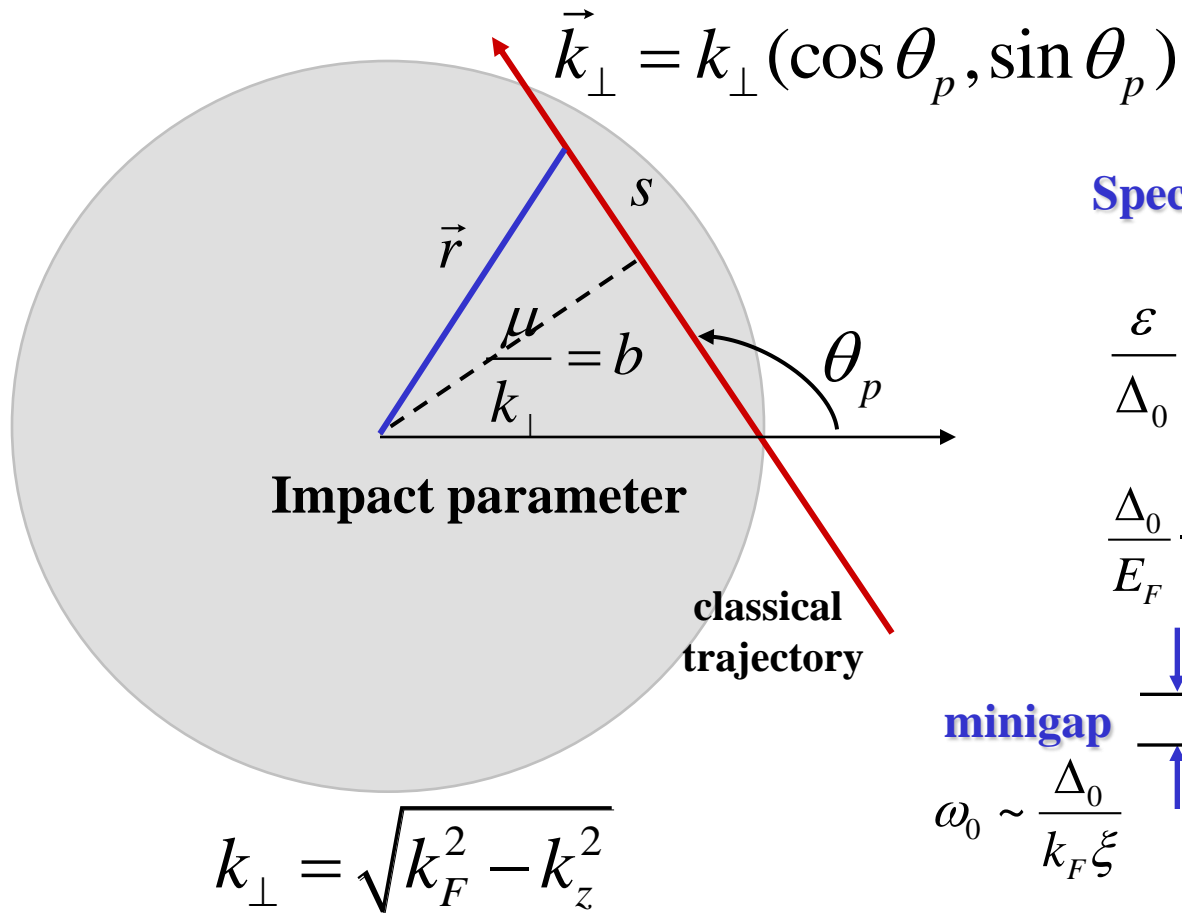


Нормальный кор
(сверхпроводящая щель
подавлена)

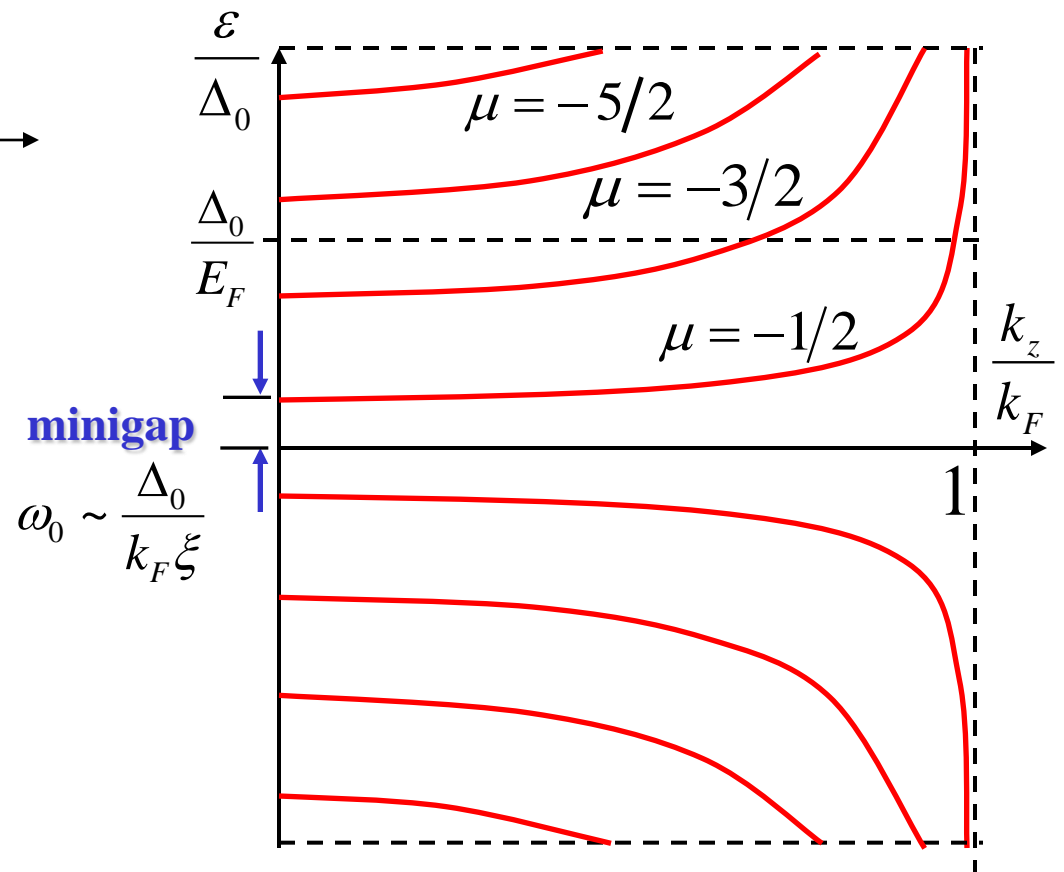
$$\Delta = |\Delta(r)| e^{i\theta}$$

Связанные состояния квазичастиц в вихрях

C. Caroli,
P.G. de Gennes,
J. Matricon
(1964)

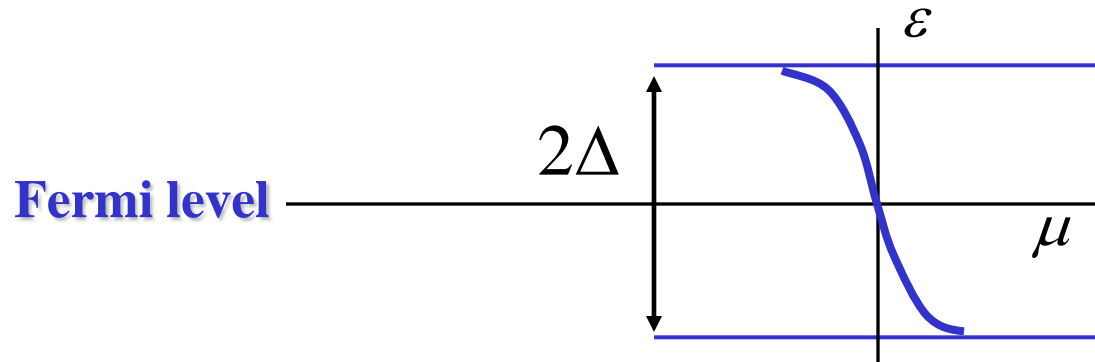


Spectrum as a function of the momentum component along the vortex axis



$$\varepsilon_{\mu}(k_{\perp}) = -\omega\mu \approx -\frac{\mu\Delta_0}{k_{\perp}\xi}$$

Аномальная спектральная ветвь. Почему она важна?



Strong dependence on the mean free path.
Difference between clean and dirty systems

Local DOS

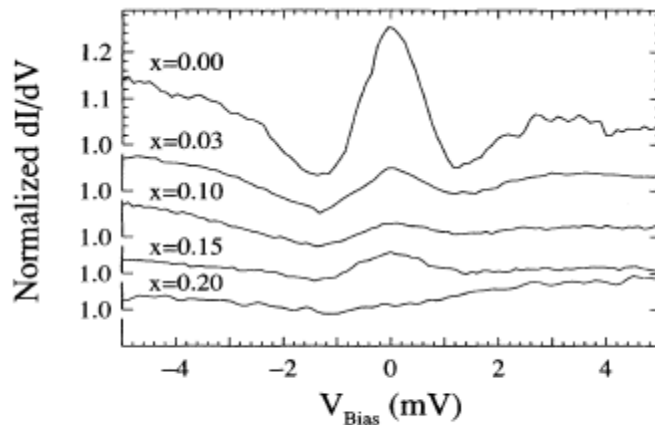
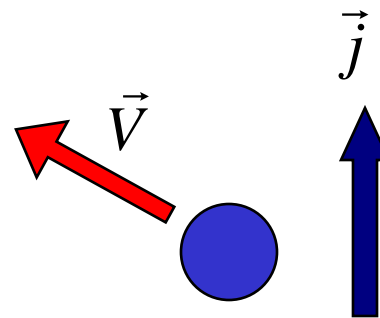


FIG. 3. Spectra taken at the center of a vortex core for various Ta substitutions at 1.3 K and 0.3 T. The spectra are normalized to the differential conductance at high bias.

Ch.Renner et al (1991)

Vortex dynamics



Thermal transport

Thermal conductivity along magnetic field:

$$\kappa(B) = n\kappa_v \propto \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

Experiment:

$$\kappa(B) \ll \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

STM наблюдения вихрей. DOS

$$LDOS = \sum_{\lambda} |u_{\lambda}(\vec{r})|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\lambda})$$

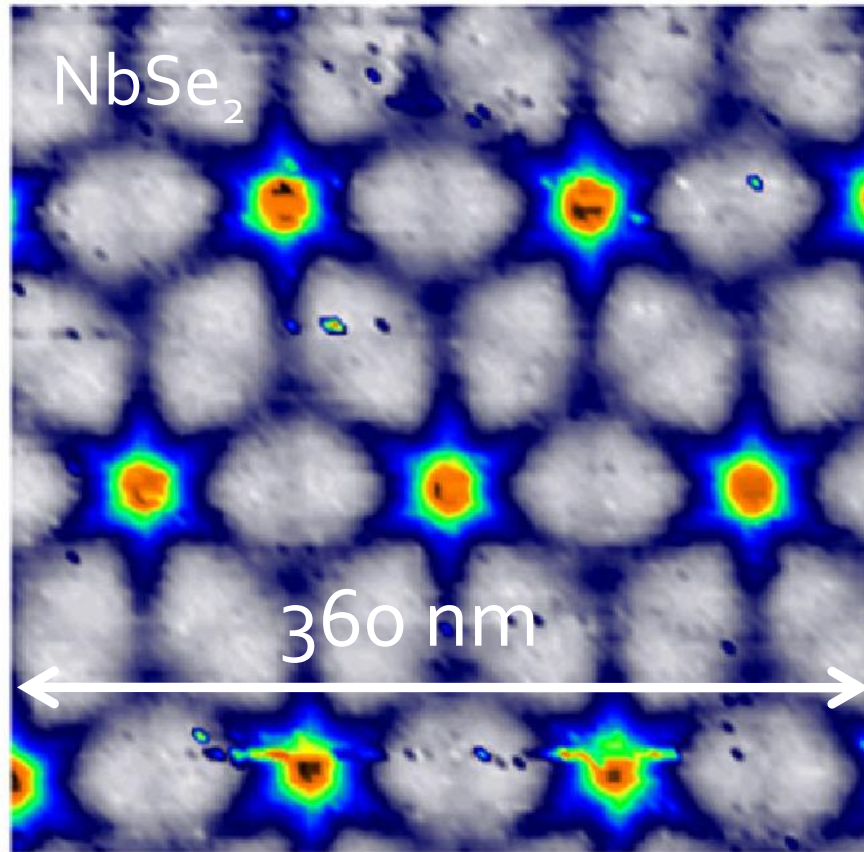
PRL **101**, 166407 (2008)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
17 OCTOBER 2008

Superconducting Density of States and Vortex Cores of 2H-NbS₂

I. Guillamón,¹ H. Suderow,¹ S. Vieira,¹ L. Cario,² P. Diener,³ and P. Rodière³



PRL, **101**, 166407 (2008)

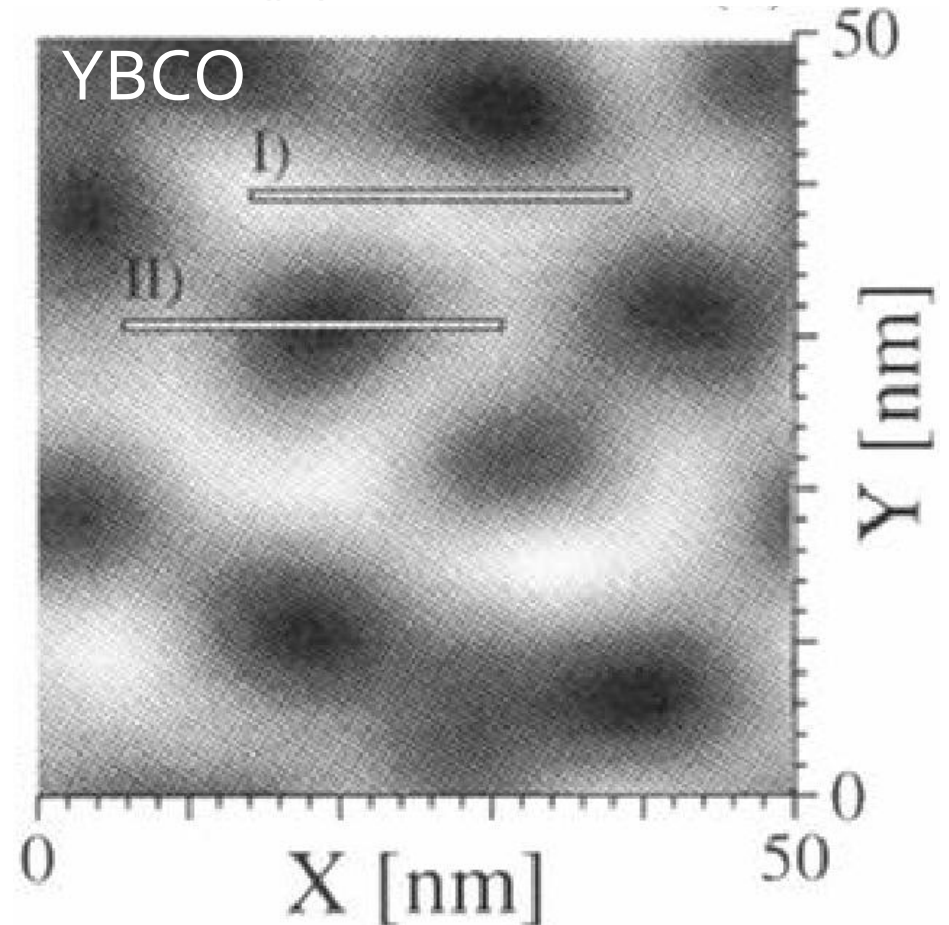
VOLUME 75, NUMBER 14

PHYSICAL REVIEW LETTERS

2 OCTOBER 1995

Direct Vortex Lattice Imaging and Tunneling Spectroscopy of Flux Lines on YBa₂Cu₃O_{7-δ}

I. Maggio-Aprile, Ch. Renner, A. Erb, E. Walker, and Ø. Fischer



PRL, **75**, 2754 (1995)

1. Найти спектр квазичастиц в 1D андреевской яме
2. Найти спектр квазичастиц в 2D андреевской яме
3. Найти спектр квазичастиц в 3D андреевской яме
4. Найти ток-фазовое соотношение для
одномодового контакта Джозефсона
5. Найти спектр квазичастиц в вихре
6. Вычислить BAX NIS контакта
7. Вычислить BAX FIS контакта