Теория БКШ 1957-2008.
История успеха

Владислав Курин

ИФМ 18 декабря 2008 г.

The Nobel Prize in Physics 1972

John Bardeen

1/3 of the prize

USA

University of Illinois
Urbana, IL, USA

b. 1908
d. 1991

Leon Neil Cooper

1/3 of the prize

USA

Brown University
Providence, RI, USA

b. 1930

John Robert Schrieffer

1/3 of the prize

USA

University of Pennsylvania
Philadelphia, PA, USA

b. 1931

БКШ – 2 статьи 1957 года

Phys. Rev. **106,** 162-164

Phys. Rev. **108**, 1175-1204

Microscopic Theory of Superconductivity*

J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer
Department of Physics, University of Illinois, Urbana, Illinois
(Received February 18, 1957)

Since the discovery of the isotope effect, it has been known that superconductivity arises from the interaction between electrons and lattice vibrations, but it has proved difficult to construct an adequate theory based on this concept. As has been shown by Fröhlich,[1] and in a more complete analysis by Bardeen and Pines[2] in which Coulomb effects were included, interactions between electrons and the phonon field lead to an interaction between electrons which may be

PHYSICAL REVIEW VOLUME 108, NUMBER 5 DECEMBER 1, 1957

Theory of Superconductivity*

J. Bardeen, L. N. Cooper,† and J. R. Schrieffer‡
Department of Physics, University of Illinois, Urbana, Illinois
(Received July 8, 1957)

A theory of superconductivity is presented, based on the fact that the interaction between electrons resulting from virtual exchange of phonons is attractive when the energy difference between the electrons states involved is less than the phonon energy, $\hbar\omega$. It is favorable to form a superconducting phase when this attractive interaction dominates the repulsive screened Coulomb interaction. The normal phase is described by the Bloch individual-particle model. The ground state of a superconductor, formed from a linear combination of normal state configurations in which electrons are virtually excited in pairs of opposite spin and momentum, is lower in energy than the normal state by amount proportional to an average $(\hbar\omega)^2$, consistent with the isotope effect. A mutually orthogonal set of excited states in one-to-one correspondence with those of the normal phase is obtained by specifying occupation of certain Bloch states and by using the rest to form a linear combination of virtual pair configurations. The theory yields a second-order phase transition and a Meissner effect in the form suggested by Pippard. Calculated values of specific heats and penetration depths and their temperature variation are in good agreement with experiment. There is an energy gap for individual-particle excitations which decreases from about $3.5kT_c$ at $T=0$°K to zero at T_c. Tables of matrix elements of single-particle operators between the excited-state superconducting wave functions, useful for perturbation expansions and calculations of transition probabilities, are given.

2 страницы!

29 страниц!

Сосчитаны статические характеристики!

- Основное состояние
- Квазичастицы
- Критическая температура
- Теплоемкость
- Эффект Мейсснера

История сверхпроводимости до БКШ

- Эксперимент
  - Открытие 1911 г. Камерлинг-Оннес
  - Эффект Мейсснера. 1934
  - Изотопический эффект 1951
- Теория:
  - Братья Лондоны 1935
  - Гортер-Казимир 1934
  - Гинзбург-Ландау 1950

Развитие микротеории

Указания на роль фононов:

- Характерная температура перехода

$$T_c \sim 10K \ll 10^4 K \sim 1eV$$

- Изотоп-эффект

$$T_c \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Гамильтониан

$$H = H_0 + H_{e-e}^{Q} + H_{e-ph}$$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k},s} \varepsilon(\mathbf{k}) - \mu \;\; a_s^{+}(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k})$$

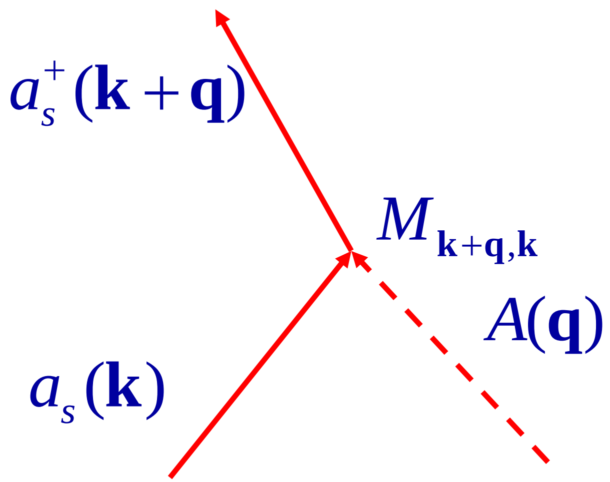
$$H_{e-ph} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q},s} M_{\mathbf{k+q},\mathbf{k}} a_s^{+}(\mathbf{k}+\mathbf{q}) a_s(\mathbf{k}) A(\mathbf{q}) + M_{\mathbf{k+q},\mathbf{k}}^{*} a_s^{+}(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}+q) A^{+}(\mathbf{q})$$

$$H_{e-e} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q},s_1,s_2} V_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}}^{Q} a_{s_1}^{+}(\mathbf{k}_1+\mathbf{q}) a_{s_2}^{+}(\mathbf{k}_2-\mathbf{q}) a_{s_2}(\mathbf{k}_2) a_{s_1}(\mathbf{k}_1)$$

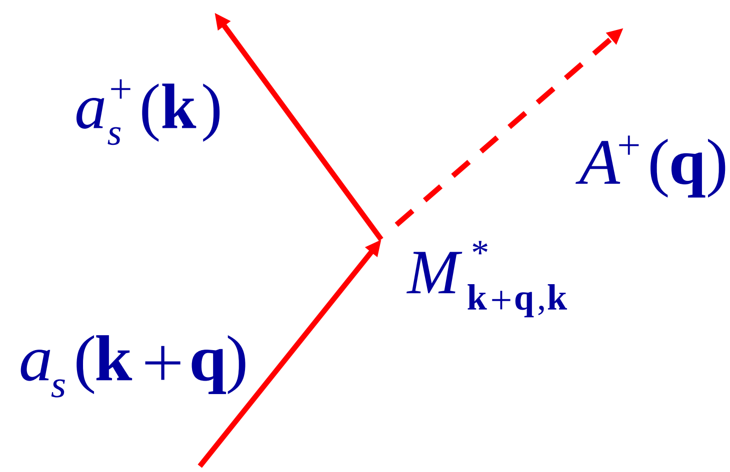
Притяжение электронов из-за фононов

H. Frolich, 1950
J. Bardeen, D. Pines, 1952

$$H_{e-ph} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q},s} M_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}} a_s^+(\mathbf{k}+\mathbf{q}) a_s(\mathbf{k}) A(\mathbf{q}) + M^*_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}} a_s^+(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}+q) A^+(\mathbf{q})$$



Поглощение фонона

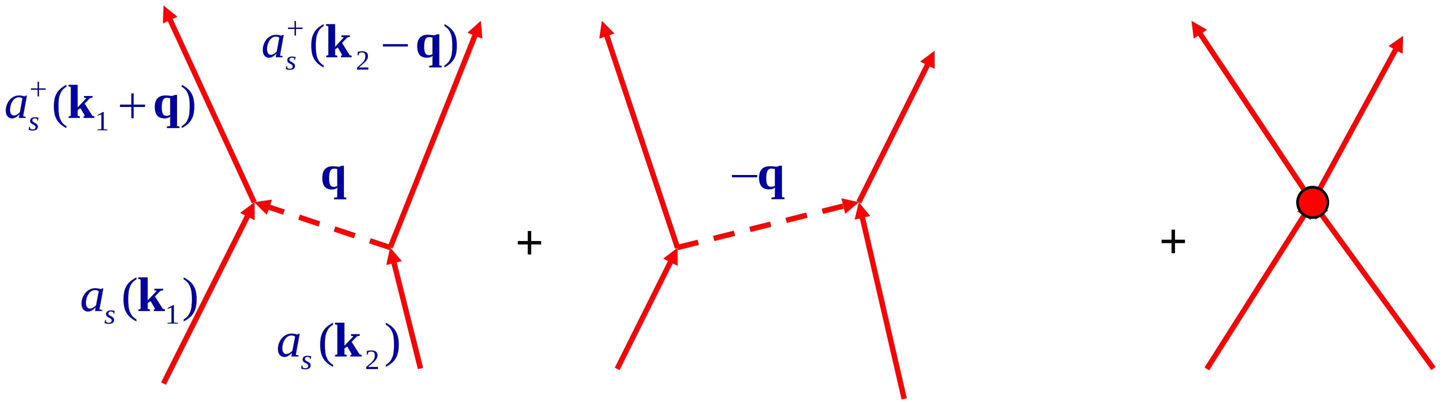


Излучение фонона

Взаимодействие между электронами

$$H_{e-e}=\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q},s_1,s_2} V^{eff}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}}\, a^+_{s_1}(\mathbf{k}_1+\mathbf{q})\,a^+_{s_2}(\mathbf{k}_2-\mathbf{q})\,a_{s_2}(\mathbf{k}_2)\,a_{s_1}(\mathbf{k}_1)$$

$$V^{eff}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}}=\frac{2\hbar\Omega(q)\left|M_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q},\mathbf{k}_1}\right|^2}{\left(\varepsilon(k_1+q)-\varepsilon(k_1)\right)^2-\hbar^2\Omega^2(q)}+\frac{4\pi e^2}{q^2+q_D^2}$$



Взаимодействие из-за обмена фононом

Экранированный «Кулон»

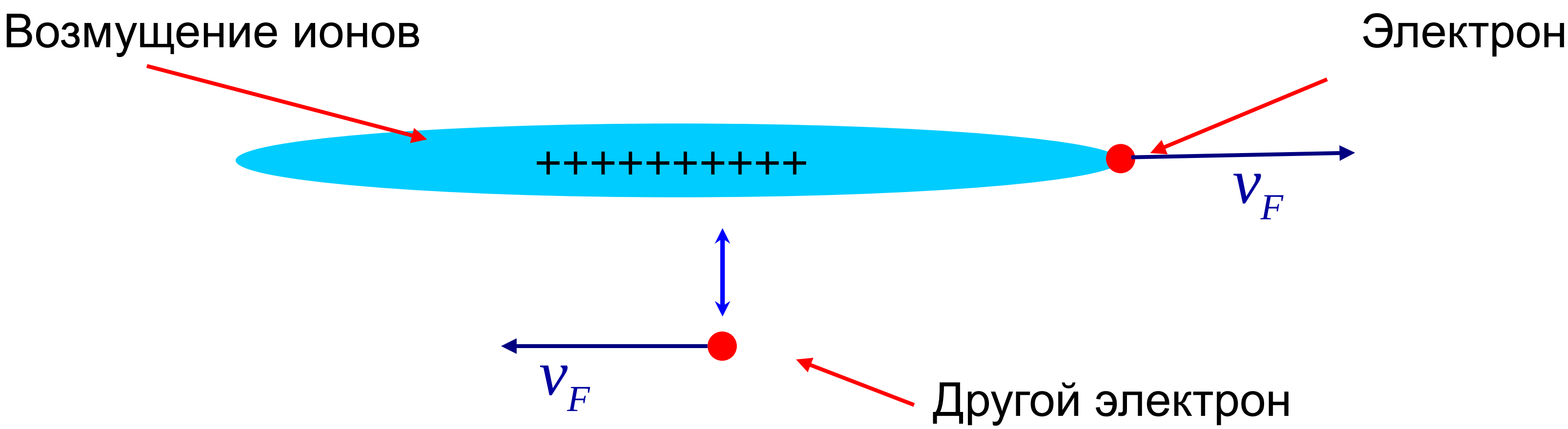
Притяжение электронов – возможно!

$$H_{e-e}=\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q},s}V^{eff}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}}\,a_s^+(\mathbf{k}_1+\mathbf{q})a_{-s}^+(\mathbf{k}_2-\mathbf{q})a_{-s}(\mathbf{k}_2)a_s(\mathbf{k}_1)$$

Противоположные спины

$$V^{eff}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}}<0$$

Притяжение!



Длина трубки

$$l\sim\frac{v_F}{\omega_D}\sim\beta d \qquad \beta=\sqrt{M/m}\sim 300;$$

Глубина потенциала

$$V\sim\frac{e^2}{d\beta}$$

Решающий шаг- задача Купера 1956

Квазичастицы Ферми газа

Основное состояние - Ферми

$$\left|\mathrm{Fermi}\right\rangle = \prod_{k<k_F} a^{+}_{\mathbf{k},\uparrow} a^{+}_{-\mathbf{k},\downarrow} \left|\mathrm{vac}\right\rangle$$

Дисперсия квазичастиц

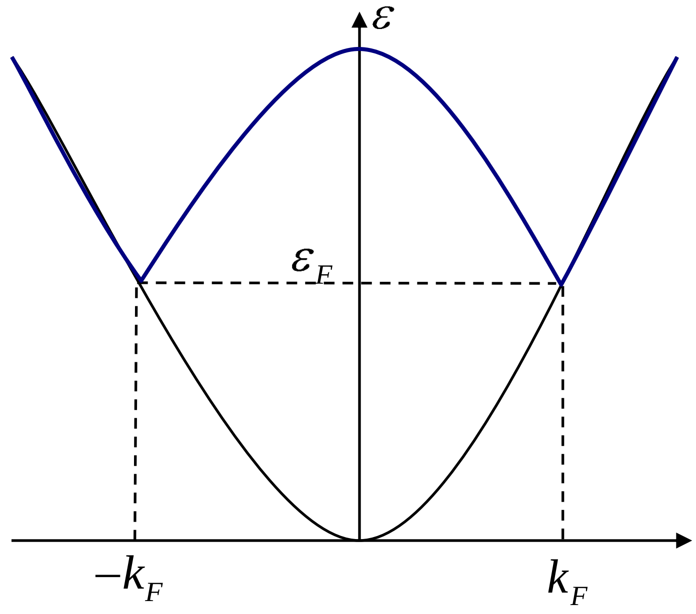
$$\xi(k) = E(N) - E_{\mathrm{Fermi}}(N) = \frac{\hbar^2}{2m}\left|k^2 - k_F^2\right|$$

Квазичастичные операторы

$$\alpha_{\mathbf{k},s}\left|\mathrm{Fermi}\right\rangle = 0$$

$$\alpha^{+}_{\mathbf{k},s} = \begin{cases} a^{+}_{\mathbf{k},s}, & k > k_F \\ a_{-\mathbf{k},-s}, & k < k_F \end{cases}$$

$$\alpha_{\mathbf{k},s} = \begin{cases} a_{\mathbf{k},s}, & k > k_F \\ a^{+}_{-\mathbf{k},-s}, & k < k_F \end{cases}$$



Две притягивающиеся квазичастицы Ферми

Уравнение Шредингера

$$\left[\hat{\xi}(\mathbf{r}_1)+\hat{\xi}(\mathbf{r}_2)+V(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\right]\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=E\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$$

K-импульс центра масс

$$\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\psi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\exp\left\{i\frac{\mathbf{K}}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)\right\}$$

Относительное движение

$$\psi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\sum c_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$$

$$E=-2\Delta$$

Всегда есть связанное состояние!!!

Куперовская пара

$$2\xi(\mathbf{k})+\Delta\; c_{\mathbf{k}}+\sum_{\mathbf{k}'}V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}c_{\mathbf{k}'}=0$$

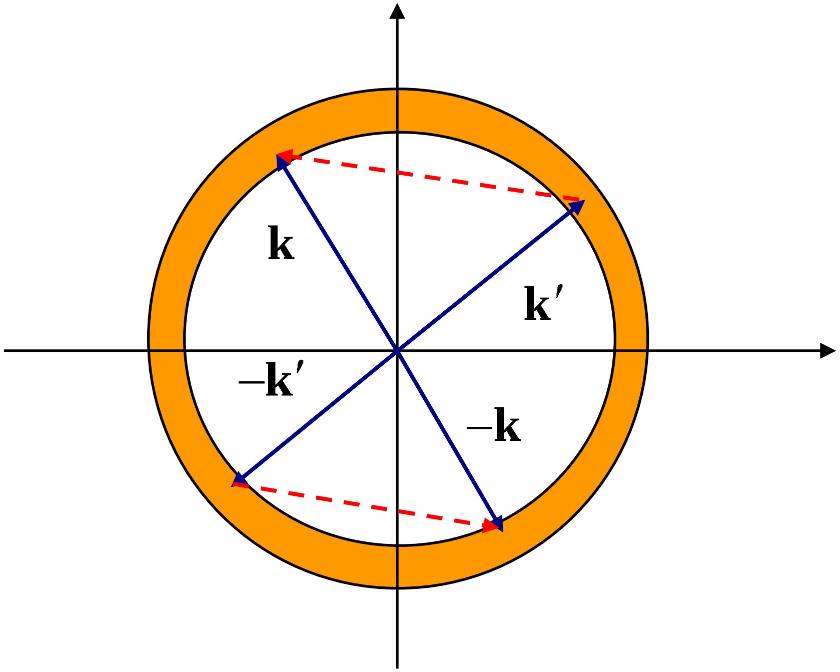
$$2\xi(\mathbf{k})+\Delta\; c_{\mathbf{k}}=g\sum_{\mathbf{k}'\subset D}c_{\mathbf{k}'}$$

Энергия связи как в 2D!

$$\Delta=\hbar\Omega_D\exp\left\{-\frac{2}{g\nu(\mu)}\right\}$$

Аппроксимация потенциала

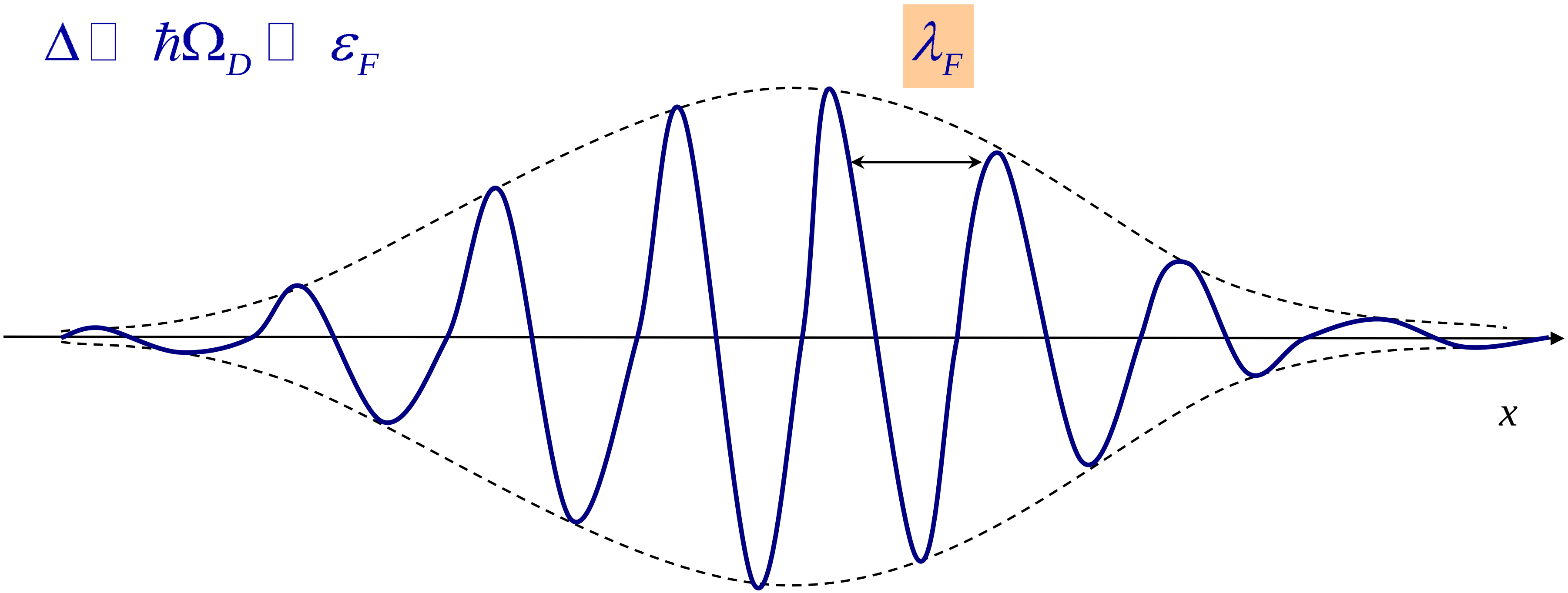
$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}=\begin{matrix}-g, & k,k'\subset D\\ 0, & k,k'\not\subset D\end{matrix}$$



$$\xi(\mathbf{k}),\xi(\mathbf{k}')<\hbar\Omega_D$$

Волновая функция

$$\Delta \ll \hbar\Omega_D \ll \varepsilon_F$$



$$\xi \sim \frac{\Delta}{\hbar v_F} \gg \lambda_F \sim n^{-1/3}$$

Куперовские пары сильно перекрыты!

Теория БКШ

$$\hat{H}_{BCS} = \hat{H} - \mu \hat{N} = \sum_{\mathbf{k},s} \varepsilon(\mathbf{k}) - \mu \;\; a_s^+(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) -$$

$$- g \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}\subset D} a_\uparrow^+(\mathbf{q}+\mathbf{k}_2) a_\downarrow^+(\mathbf{q}-\mathbf{k}_2) a_\downarrow(\mathbf{q}-\mathbf{k}_1) a_\uparrow(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1)$$

Импульс ЦМ

$$2\mathbf{q} = \mathbf{K}$$

Пробная функция для $q=0$ (Шриффер?)

$$|BCS\rangle = \prod_{k<k_F} u_\mathbf{k} + v_\mathbf{k} a_{\mathbf{k},\uparrow}^+ a_{-\mathbf{k},\downarrow}^+ \;\; |\mathrm{vac}\rangle \qquad u_\mathbf{k}^2 + v_\mathbf{k}^2 = 1$$

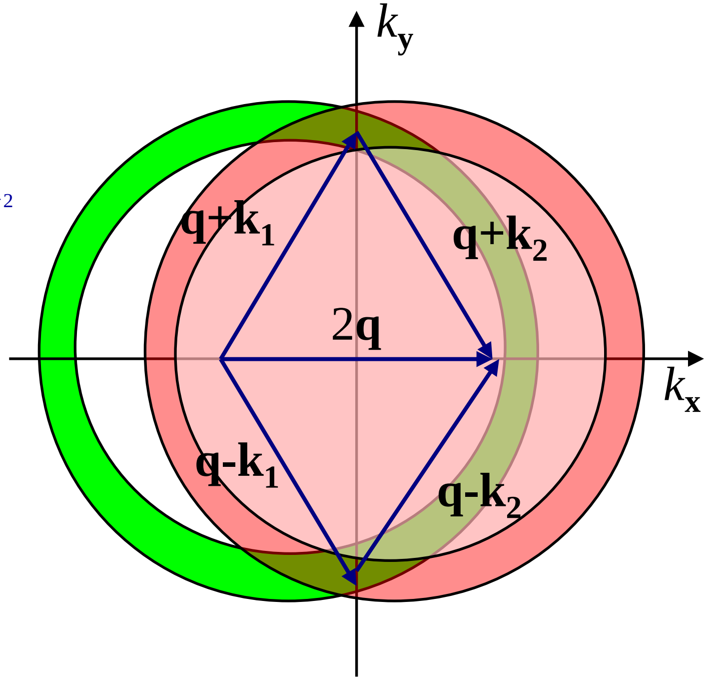
$$F = \langle BCS | \hat{H} | BCS \rangle = \sum_\mathbf{k} 2(\varepsilon(k) - \mu) v_\mathbf{k}^2 - g \sum_\mathbf{k} u_{\mathbf{k}_1} v_{\mathbf{k}_1} u_{\mathbf{k}_2} v_{\mathbf{k}_2}$$

Параметр порядка - аномальное среднее

$$\Delta = g \sum_\mathbf{k} u_\mathbf{k} v_\mathbf{k} = \langle BCS | \hat{\Delta} | BCS \rangle$$

Оператор щели

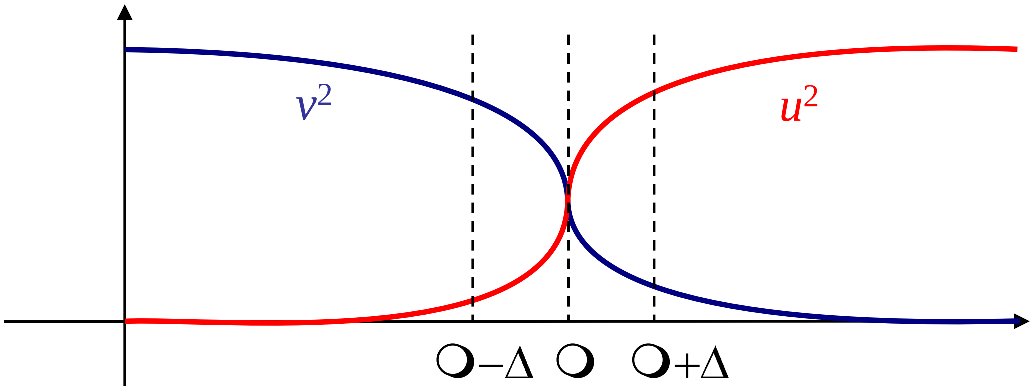
$$\hat{\Delta} = \sum_\mathbf{k} a_{\mathbf{k},\uparrow}^+ a_{-\mathbf{k},\downarrow}^+$$



Функции *u*,*v*-рыхлая ферми-сфера

$$u_{\mathbf{k}}^2, v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1 \pm x_{\mathbf{k}}}{2} \qquad x_{\mathbf{k}} = \frac{\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu}{\sqrt{(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)^2 + \Delta^2}}$$

$$E_{BCS} < E_{Fermi}$$



Уравнение самосогласования

$$1 = g \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)^2 + \Delta^2}}$$

T=0

$$\Delta = 2\hbar\Omega_D \exp\left\{-\frac{2}{g\nu(\mu)}\right\}$$

Квазичастицы

$$\left|\mathbf{k},\uparrow\right\rangle = a^{+}_{\mathbf{k},\uparrow} \prod_{\substack{\mathbf{k}'\neq\mathbf{k}\\ k<k_F}} u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} a^{+}_{\mathbf{k}',\uparrow} a^{+}_{-\mathbf{k}',\downarrow} \left|\mathrm{vac}\right\rangle$$

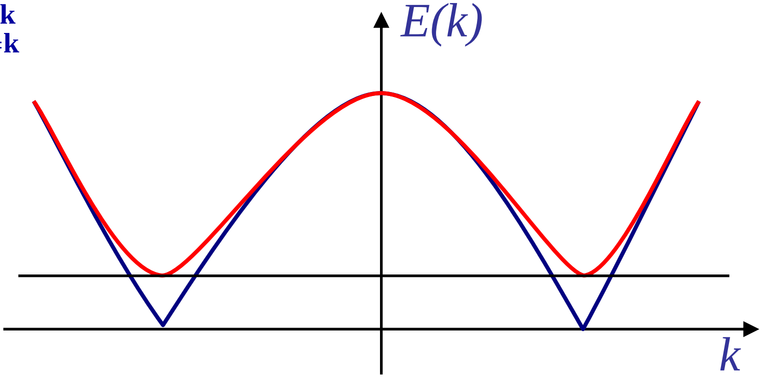
Один неспаренный электрон

Энергия квазичастицы

$$E(\mathbf{k}) = \left\langle \mathbf{k},\uparrow \middle| \hat{H} \middle| \mathbf{k},\uparrow \right\rangle - \left\langle BCS \middle| \hat{H} \middle| BCS \right\rangle = \ \varepsilon(k) - \mu \ \ (1 - 2v_{\mathbf{k}}^2) + 2\Delta u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}$$

$$\left\langle \mathbf{k},\uparrow \middle| \hat{H} \middle| \mathbf{k},\uparrow \right\rangle = (\varepsilon(k) - \mu) + \sum_{\mathbf{k}_1\neq\mathbf{k}} 2(\varepsilon(k) - \mu) v_{\mathbf{k}_1}^2 - g \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq\mathbf{k}\\ \mathbf{k}_2\neq\mathbf{k}}} u_{\mathbf{k}_1} v_{\mathbf{k}_1} u_{\mathbf{k}_2} v_{\mathbf{k}_2}$$

$$\boxed{E(k) = \sqrt{(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)^2 + \Delta^2}}$$



Сверхпроводник с током

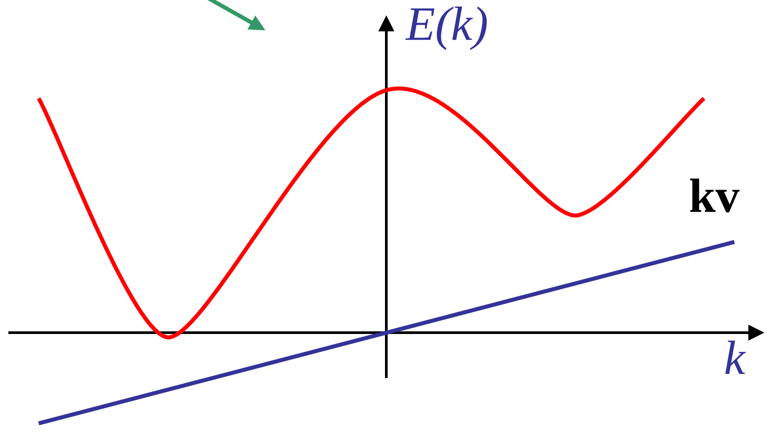
$$\left|\Psi_{\mathbf{q}}\right\rangle = \left|BCS_{\mathbf{q}}\right\rangle = \prod_{k<k_F} \; u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a^{+}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\uparrow} a^{+}_{\mathbf{q}-\mathbf{k},\downarrow} \; \left|\mathrm{vac}\right\rangle$$

движущийся конденсат-преобразование Галилея

$$E(k) = \sqrt{(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu)^2 + \Delta^2} + \mathbf{kv}, \quad \mathbf{v} = \frac{\hbar \mathbf{q}}{m}$$

$$\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_i) = \exp \; i\mathbf{q}\sum \mathbf{x}_i \; \Psi_{\mathbf{q}=0}(\mathbf{x}_i)$$
$$= \exp \; i\sum \vartheta(\mathbf{x}_i) \; \Psi_{\mathbf{q}=0}(\mathbf{x}_i)$$

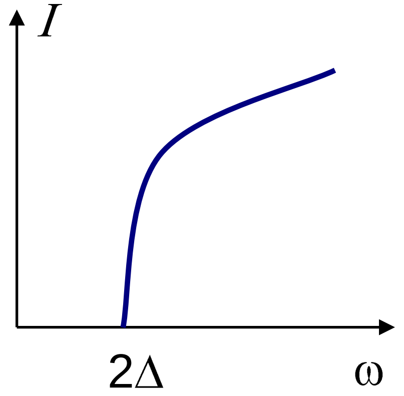
$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{m}\sum\left[\; q+k \; + \; q-k \;\right] v_{\mathbf{k}}^2 = eNv = \frac{e\hbar}{m} N \nabla \theta$$

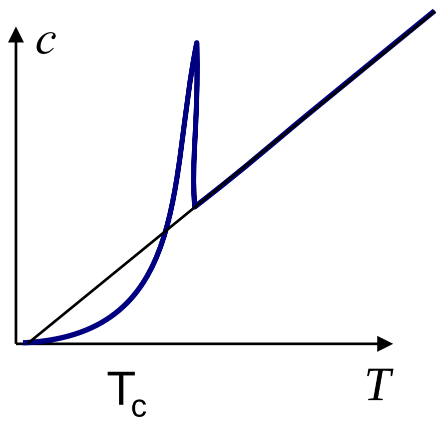


Существует фаза!
сверхпроводящее состояние - когерентное!

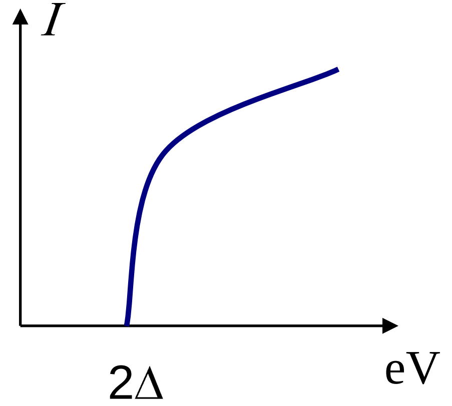
Экспериментальные следствия

- Щель поглощения
- Поведение теплоемкости
- Туннелирование квазичастиц
- Эффект Мейсснера





S-I-S контакт



Роль Боголюбова. Он был близко.

Он знал все важные слова!
•Аномальные средние
•Нарушение симметрии
•Преобразование Боголюбова

Преобразование

$$a_{\uparrow}(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}} \alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}} \alpha_{\downarrow}^{+}(-\mathbf{k})$$
$$a_{\downarrow}(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}} \alpha_{\downarrow}(\mathbf{k}) - v_{\mathbf{k}} \alpha_{\uparrow}^{+}(-\mathbf{k})$$

Диагонализует БКШ

Боголюбов 1958, для Бозе 1948
Валатин 1958

Боголюбов, Толмачев, Ширков 1958
Дальше были Горьков, Абрикосов и …..

Сверхпроводимость – спонтанное нарушение симметрии

Появление аномального среднего

$$\Delta = g\sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = \left\langle BCS \middle| \hat{\Delta} \middle| BCS \right\rangle$$

$$\hat{\Delta} = \sum_{\mathbf{k}} a^{+}_{\mathbf{k},\uparrow} a^{+}_{-\mathbf{k},\downarrow}$$

Самосогласованное поле

$$\hat{H}_{e-e} \Box \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}\subset D} a^{+}_{\uparrow}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_2) a^{+}_{\downarrow}(\mathbf{q}-\mathbf{k}_2) a_{\downarrow}(\mathbf{q}-\mathbf{k}_1) a_{\uparrow}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1)$$

$$\approx \sum a^{+}_{\uparrow}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_2) \left\langle a^{+}_{\downarrow}(\mathbf{q}-\mathbf{k}_2) a_{\downarrow}(\mathbf{q}-\mathbf{k}_1) \right\rangle a_{\uparrow}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1) + \left\langle a^{+}_{\uparrow}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_2) a^{+}_{\downarrow}(\mathbf{q}-\mathbf{k}_2) \right\rangle a_{\downarrow}(\mathbf{q}-\mathbf{k}_1) a_{\uparrow}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1) + \ldots$$

Нормальное среднее

Аномальное среднее

Проблема калибровки

Калибровочное преобразование

$$\psi(\mathbf{x}) \to \psi(\mathbf{x}) \exp\left\{ i \frac{e}{\hbar c} f(\mathbf{x}) \right\},$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}),$$
$$\varphi(\mathbf{x}) \to \varphi(\mathbf{x}) - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{c \partial t}$$

Аномальное среднее явно нарушает фазовую инвариантность, и надо поправлять волновую функцию

$\sigma_{\perp}(\omega, \mathbf{k})$ - Mattis Bardeen, 1958

$\sigma_{\parallel}(\omega, \mathbf{k})$ - Nambu, 1960

Электромагнитный отклик

$$j_i = Q_{i,j}(k) A^j$$

Сохранение заряда

$$k^i Q_{i,j}(k) = 0$$

Калибровочная инвариантность

$$Q_{i,j}(k) k^j = 0$$

всего 6 независимых компонент, как в sym 3D тензоре

$$\mathbf{j} = \vec{\vec{\sigma}}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}$$

В изотропной среде

$$\vec{\vec{\sigma}}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{\perp}(\omega, \mathbf{k})\left(1 - \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2}\right) + \sigma_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2}$$

Нобелевская премия 2008

for the discovery of the mechanism of spontaneous broken symmetry in subatomic physics

Yoichiro Nambu

Makoto Kobayashi

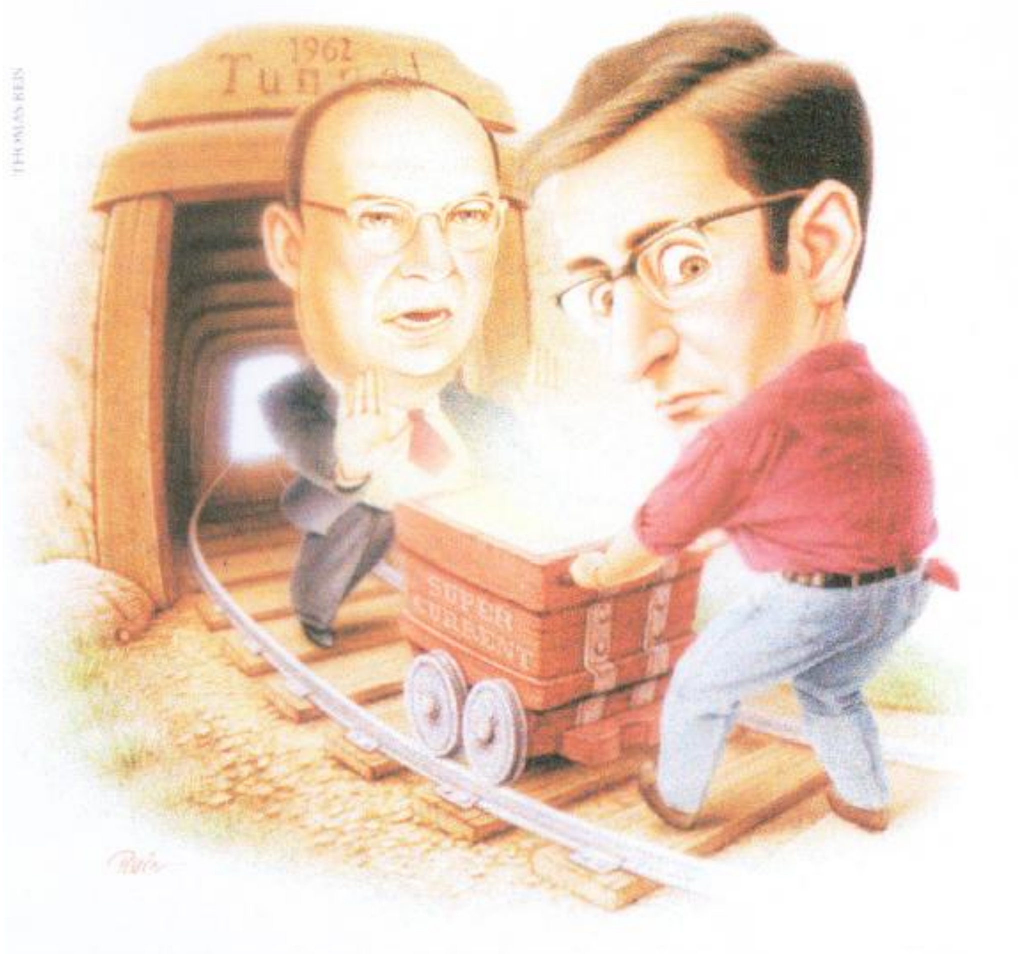
Toshihide Maskawa

Spontaneous symmetry breaking in particle physics: a case of cross fertilization

Yoichiro Nambu

Эффект Джозефсона и интерференция

Дискуссия Бардин-Джозефсон

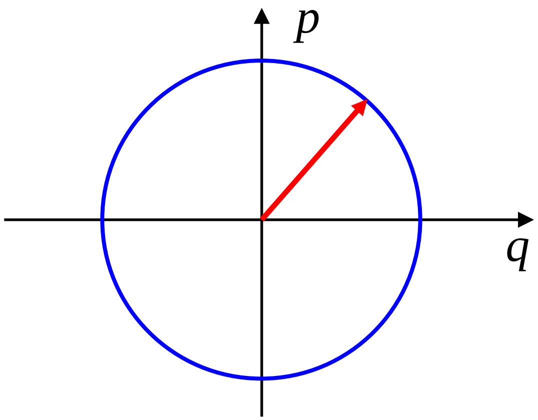


$$j = j_c \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Но существование фазы в квантовой механике нетривиально!

Фаза в квантовой механике и БКШ

Проблема!



Но $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$

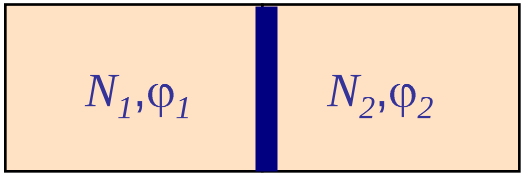
$$\Delta J \, \Delta \varphi \geq \hbar/2$$

$$J = \hbar N$$

$$|BCS_\theta\rangle = \prod_{k<k_F} u_{\mathbf{k}} + e^{i\theta} v_{\mathbf{k}} a^+_{\mathbf{k},\uparrow} a^+_{-\mathbf{k},\downarrow} \, |\mathrm{vac}\rangle$$

$$\Delta = g \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} e^{i\theta} = |\Delta| e^{i\theta}$$

$$|BCS_N\rangle = \int_0^{2\pi} e^{-iN\theta} \, |BCS_\theta\rangle \frac{d\theta}{2\pi}$$



$\Psi(N_1 + N_2, \theta_1 - \theta_2)$ Правильная Ψ

Состояние всего куска когерентно!

Нобелевские премии, связанные со сверхпроводимостью

- Камерлинг-Оннес, 1913
- Бардин-Купер-Шриффер, 1972
- Джозефсон, 1973
- Беднорц, Мюллер, 1987
- Де-Жен, 1991
- Абрикосов, Гинзбург 2003
- Намбу, 2008