Момент Лондона
и гиромагнитные эффекты

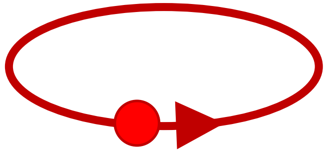
Момент Лондона – аналог эффекта Барнетта для сверхпроводника

Эффект Барнетта – частный случай гиромагнитных эффектов

Начало рассмотрения гиромагнитных эффектов: теорема Лармора, гипотеза Ампера

Гипотеза Ампера

+q, m

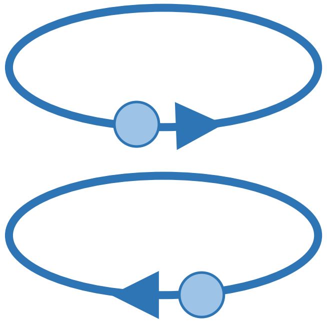


$$\overrightarrow{M_0} \neq \vec{0}$$
$$\overrightarrow{\mu_0} \neq \vec{0}$$

«магнит + ротор гироскопа»

+q, m

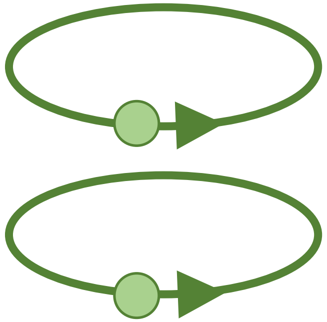
-q, m



$$\overrightarrow{M_0} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{\mu_0} \neq \vec{0}$$

+q, m

-q, m



$$\overrightarrow{M_0} \neq \vec{0}$$
$$\overrightarrow{\mu_0} = \vec{0}$$

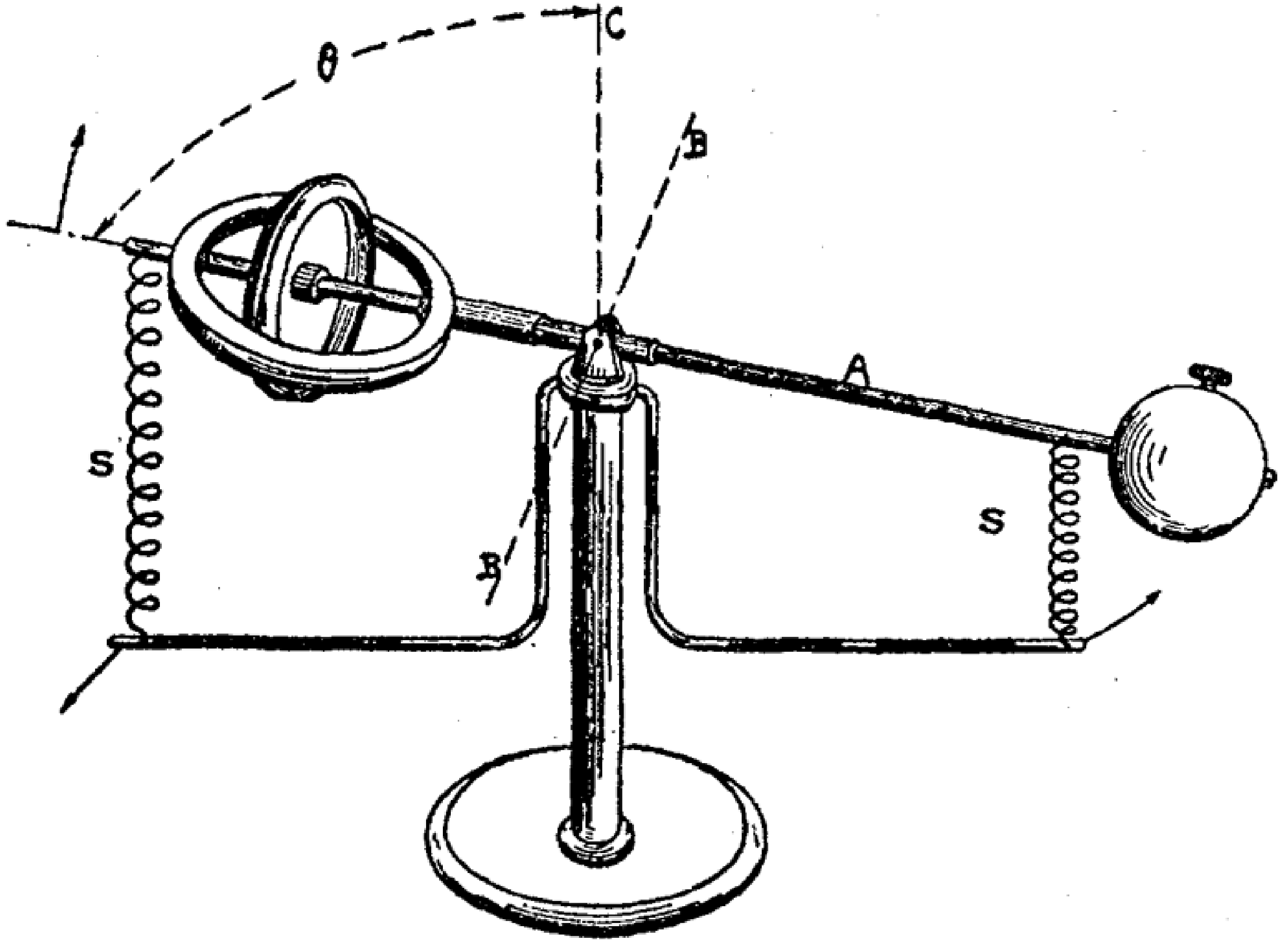
Гиромагнитное соотношение:

$$\gamma_0 = \frac{\mu_0}{M_0}$$

Орбитальное соотношение для электрона: $\gamma_0 = -\frac{e}{2mc}$

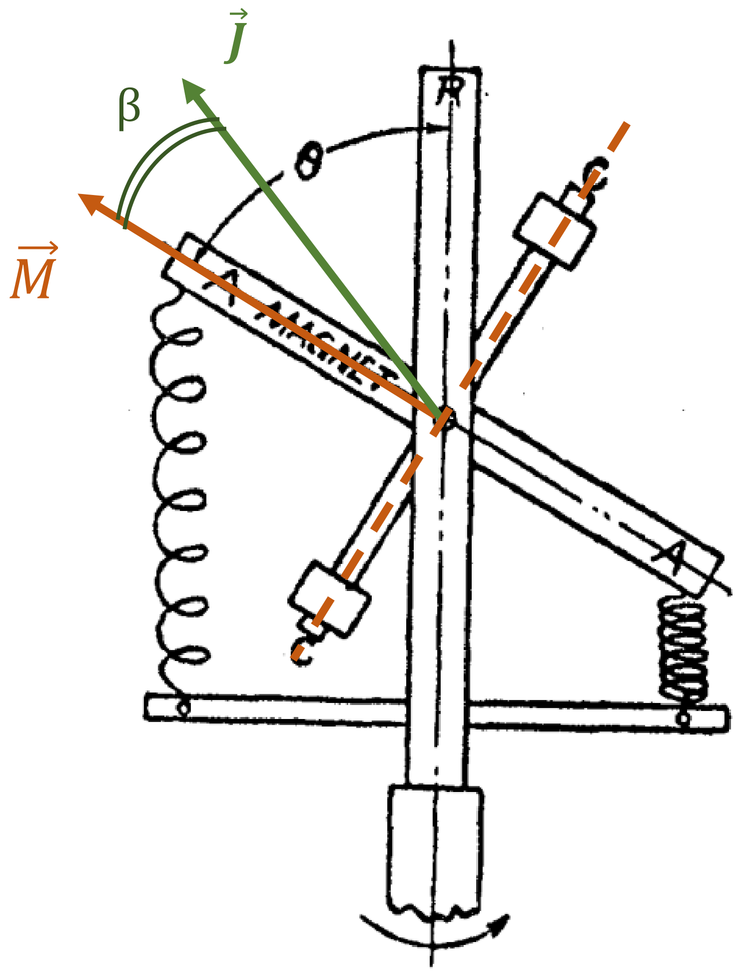
Соотношение для произвольной системы: $\gamma = g\gamma_0$

Механическая модель, иллюстрирующая гиромагнитные эффекты



S. Barnett, “Gyromagnetic and electron-inertia effects”, *Review of Modern Physics*, vol. 7, pp. 129–166, 1935.

Эксперимент Максвелла



$$\Omega = const, \theta = const$$

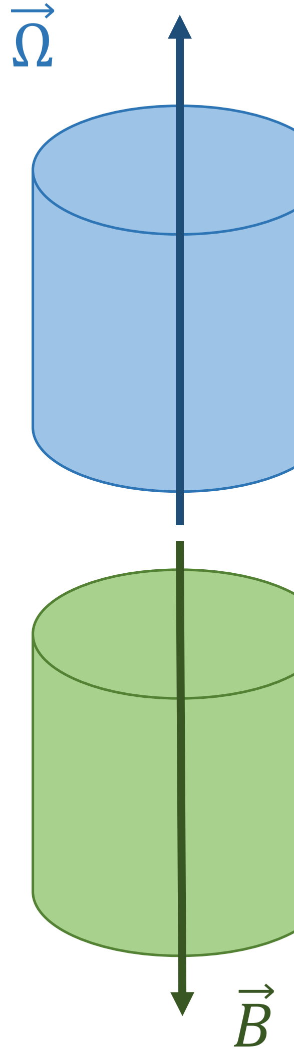
$$\begin{cases} J\cos\beta = A\Omega\cos\theta + \mathrm{M} \\ J\sin\beta = C\Omega\sin\theta \\ T = \Omega J\sin(\theta - \beta) \end{cases}$$

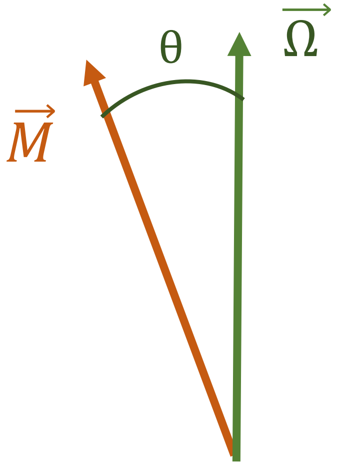
$$T = [M_0\Omega + (A - C)\Omega^2\cos\theta]\sin\theta$$

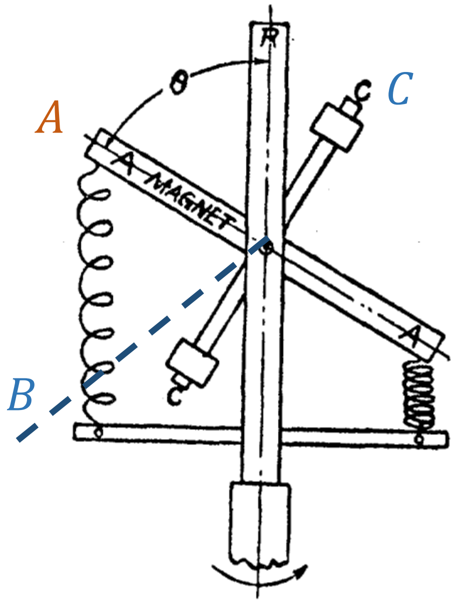
Состояние равновесия:

$$\cos\theta = \frac{M}{(C - A)}\Omega \qquad \mathrm{C} > A$$

Эффект Барнетта







$$\vec{\mu},\ \vec{\mu} = \vec{M}\gamma \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{H_{rot}} = \gamma^{-1}\vec{\Omega}$$

Момент механической силы:

$$T = [M_0\Omega + (A - C)\Omega^2 cos\theta]sin\theta$$

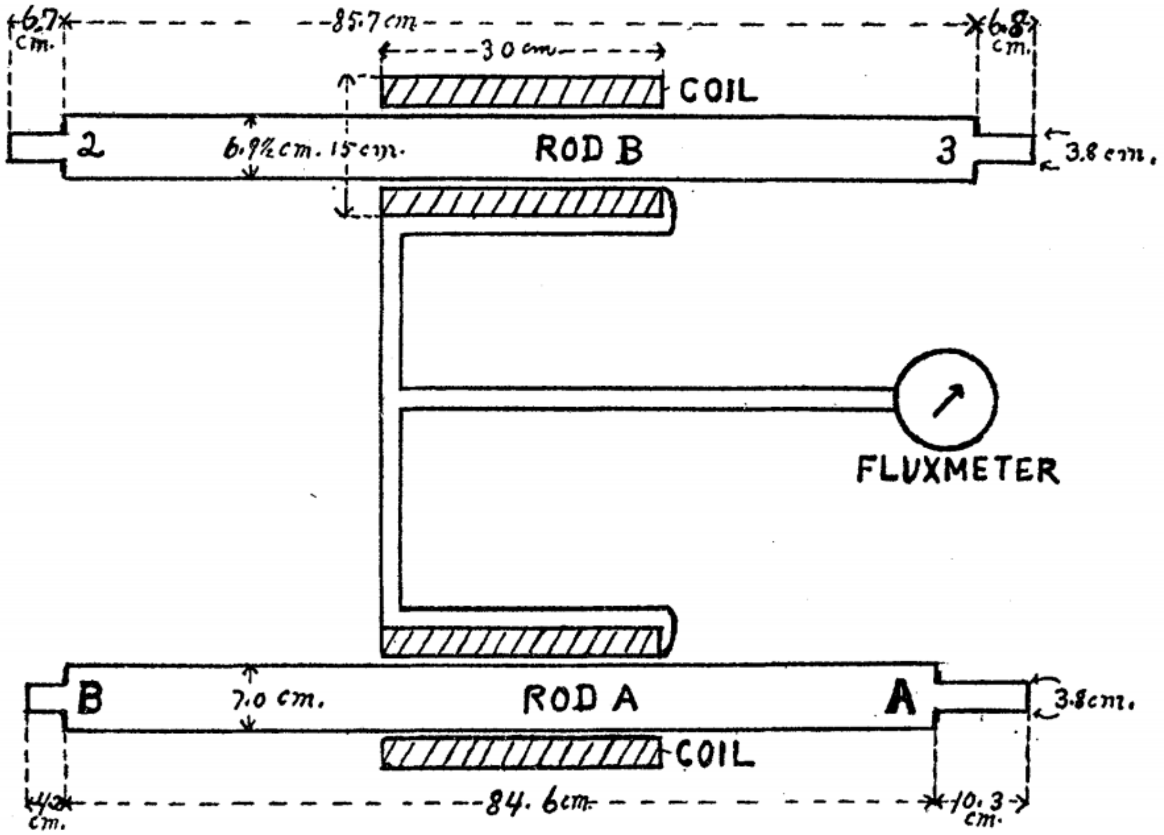
Момент силы в магнитном поле:

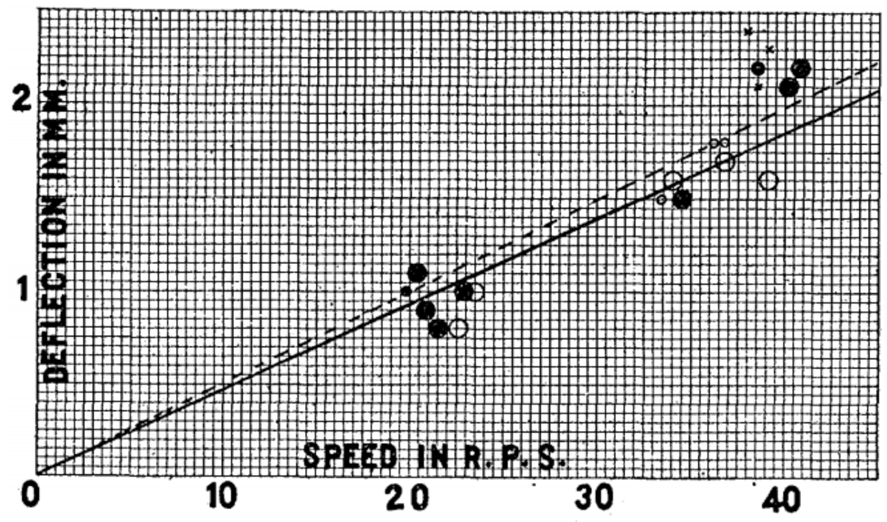
$$T' = \mu_0 H sin\theta$$

$$T' = T \ \Rightarrow \ \mu_0 H sin\theta = [M_0\Omega + (A - C)\Omega^2 cos\theta]sin\theta$$

$$\Omega \leq 500 \text{ Гц}, \quad \Delta H \sim 10^{-4} \text{ Гс}$$

Эффект Барнетта – эксперимент

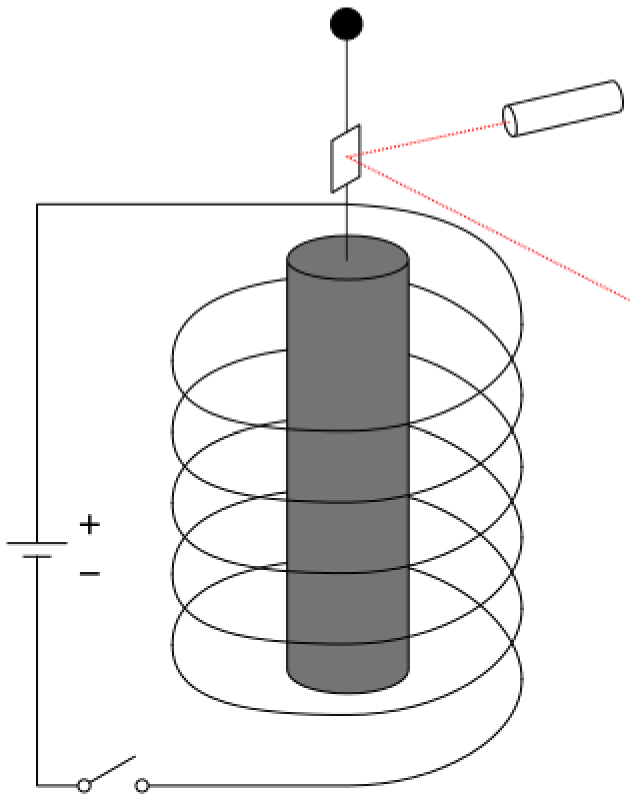


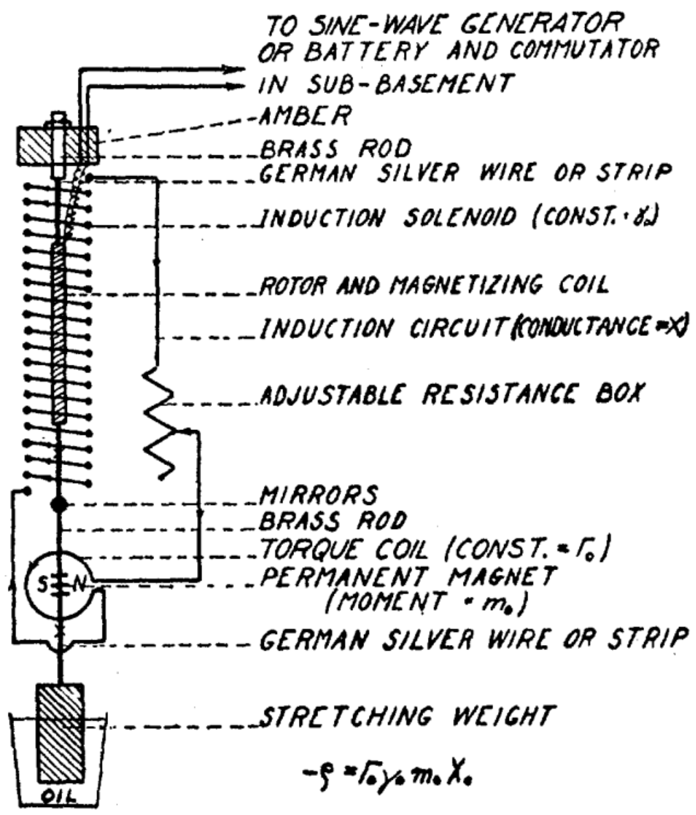


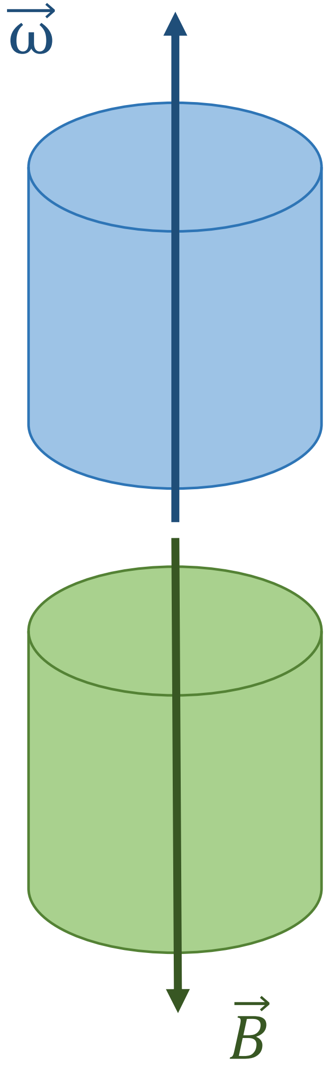
S. Barnett, "Magnetisation by rotation", *The Physical Review*, vol. VI, no. 4, pp. 239–270, 1915.

Эффект Эйнштейна – де Гааза

$$\vec{H} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{\mu} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta M_{concealed}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{M}$$

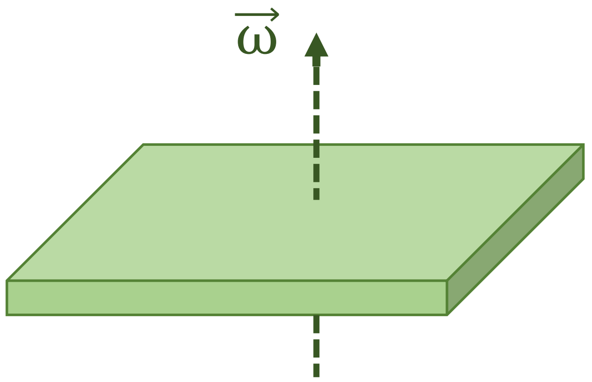






O.W. Richardson, Phys.Rev. 26, 248 (1908)

Эффект Барнетта в тонких плёнках



Уравнение Ландау — Лифшица — Гильберта:

$$\dot{\boldsymbol{m}} = -\gamma \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_{\text{eff}} + \alpha \boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}}$$

Во вращающейся системе отсчёта:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_R = \boldsymbol{m}_R \times [-\gamma \boldsymbol{H}^R_{\text{eff}} + \dot{\phi}(t)\boldsymbol{e}_z + \alpha \dot{\boldsymbol{m}}_R]$$

$$\boldsymbol{m}_R = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

Стационарные состояния:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_R = 0 \qquad \dot{\phi}(t) = \omega = \text{const}$$

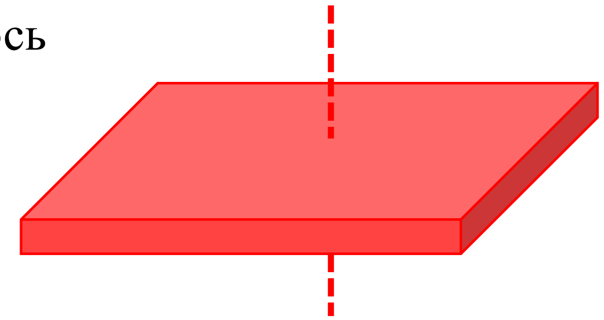
$$0 = \boldsymbol{m}_R \times (-\gamma \boldsymbol{H}^R_{\text{eff}} + \omega \boldsymbol{e}_z)$$

$$H_{eff} = -M_s D m_z$$

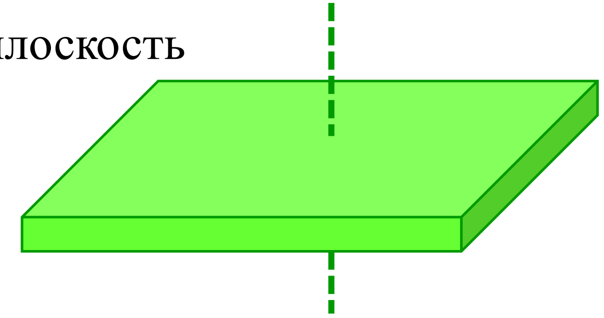
S.Bretzel, G.E.W. Bauer, Y. Tserkovnyak, A. Braatas, Appl.Phys.L. 95, 122504 (2009)“Barnett effect in thin magnetic films and nanostructures”

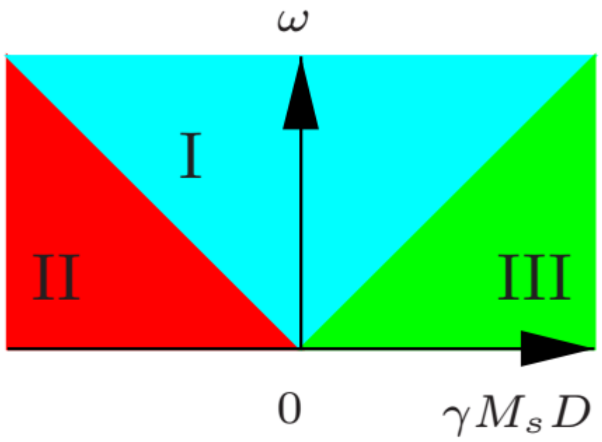
Эффект Барнетта в тонких плёнках

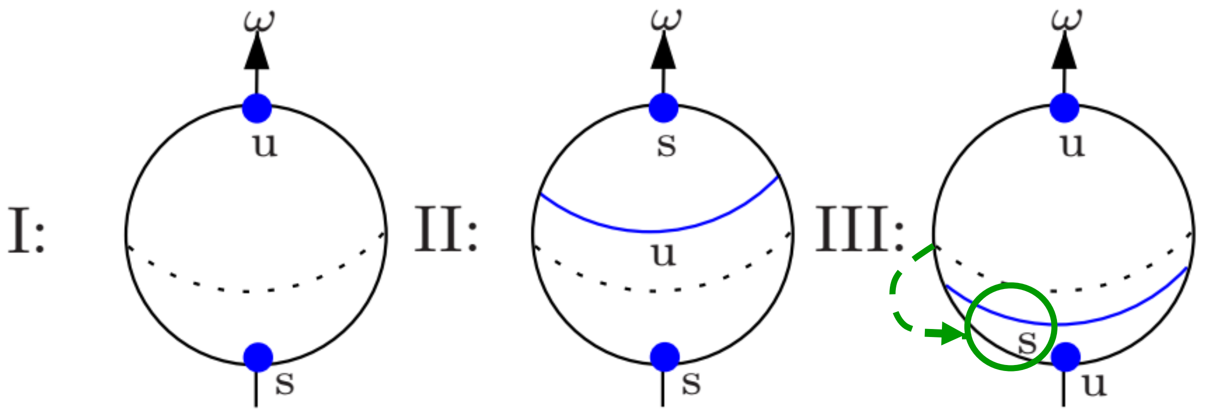
$D < 0$,
лёгкая ось



$D > 0$,
лёгкая плоскость





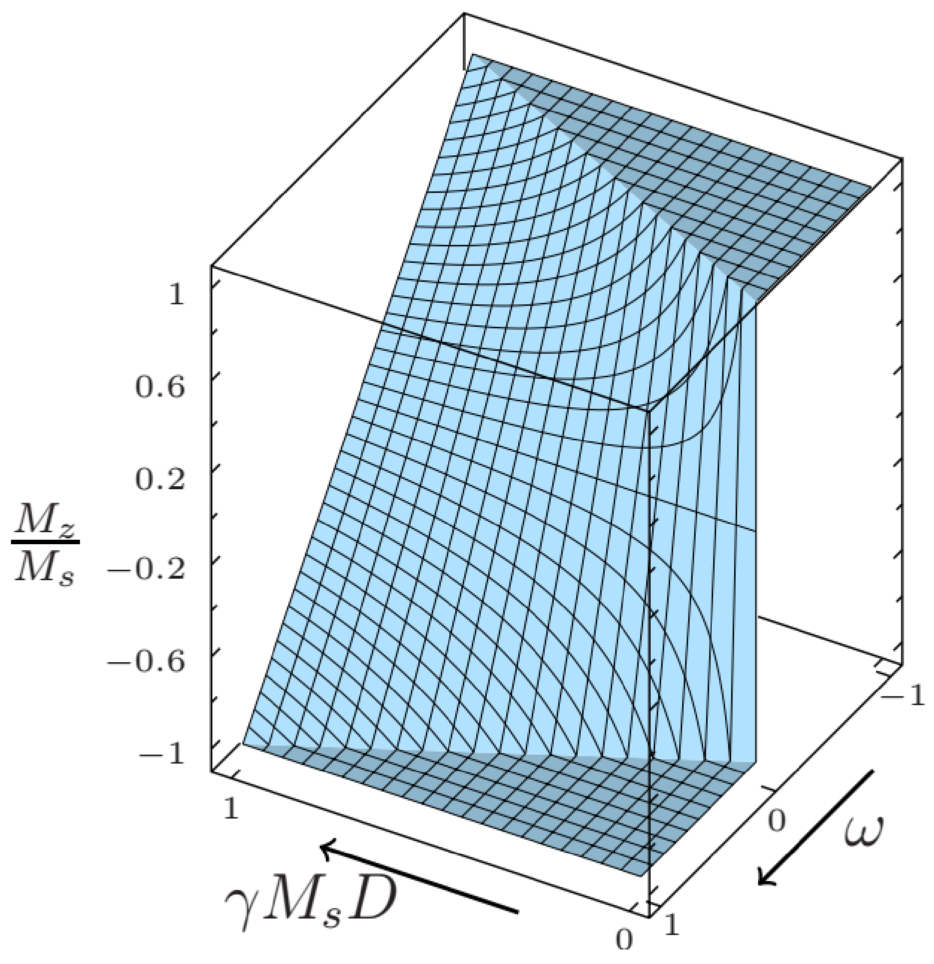


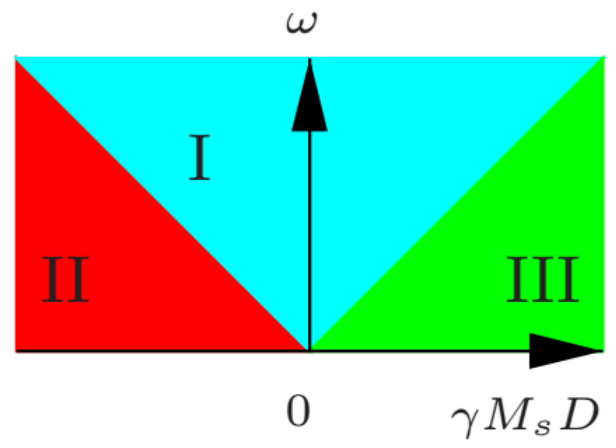
$$\omega > \gamma M_s |D| \quad \Rightarrow \theta = 0, \theta = \pi$$

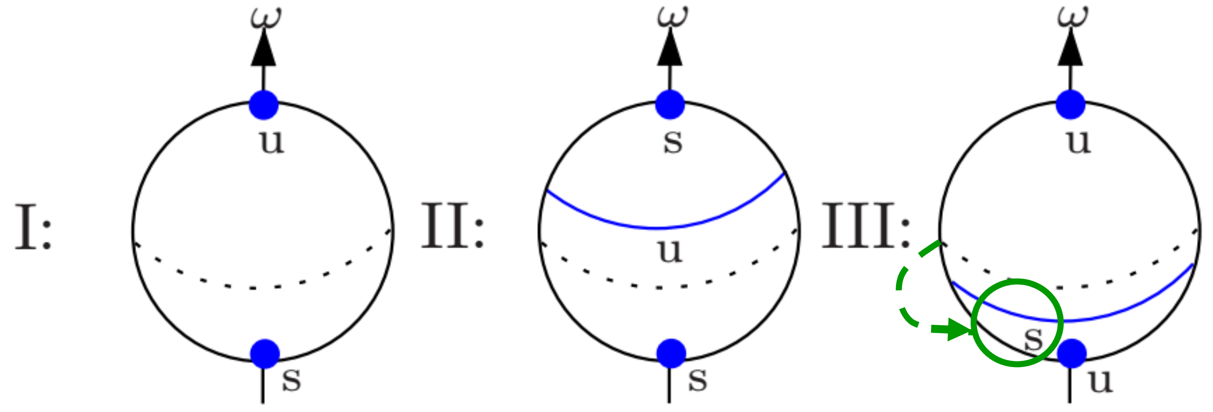
$$\omega < \gamma M_s |D| \quad \Rightarrow \theta = 0, \theta = \pi, \cos(\theta_2) = -\frac{\omega}{\gamma M_s D}$$

Вращение ⇒ z-компонента стационарного состояния

Эффект Барнетта в тонких плёнках



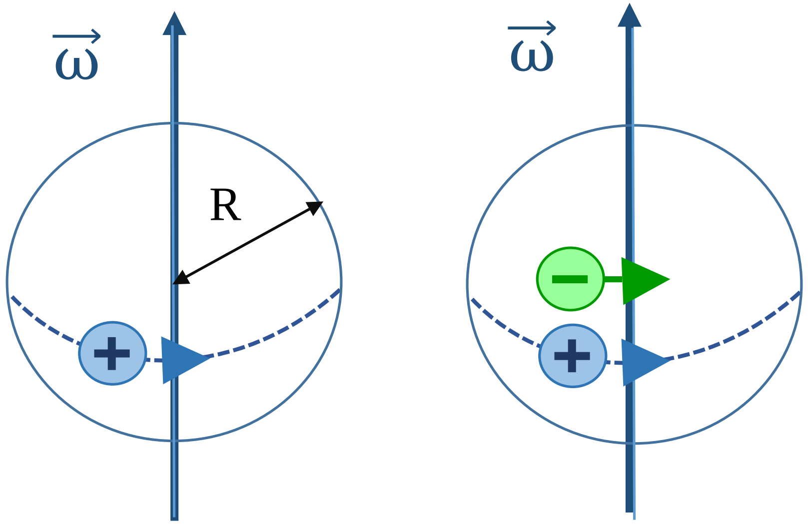




Вращение ⇒ z-компонента стационарного состояния

Момент Лондона

$$\vec{\omega} \Rightarrow \vec{j} \Rightarrow \vec{h}(t) \Rightarrow \vec{E}$$



$$rot(\vec{p_s}) = \vec{0} = rot\left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A}\right)$$

$$rot(\vec{v}) = -\frac{e}{mc}\vec{h}$$

$$rot(\vec{h}) = -\frac{4\pi n_s e}{c}(\vec{v} - \vec{v_0})$$

$\vec{v_0}$ – локальная скорость тела

$$\begin{cases} rotrot(\vec{v} - \vec{v_0}) = -\beta^2(\vec{v} - \vec{v_0}) \\ rotrot(\vec{h}) = -\beta^2\left(\vec{h} + \dfrac{2mc}{e}\vec{\omega}\right) \end{cases}, r < R \qquad \begin{cases} div(\vec{h}) = 0 \\ rot(\vec{h}) = 0 \end{cases}, r > R$$

Характерный масштаб: $\beta^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{4\pi n_s e^2}{mc^2}$

$$j_\varphi \vec{e_\varphi} = n_s e(\vec{v} - \vec{v_0}) \approx -\frac{e^{-\beta(R-r)}}{\beta} sin\theta \frac{3n_s\omega e}{\beta}\vec{e_\varphi}, (\mathrm{r} \to \mathrm{R} - 0)$$

Магнитный момент: $M = \dfrac{mc\omega}{e}R^3\left\{1 - \dfrac{3}{\beta R}coth(\beta R) + \dfrac{3}{\beta^2 R^2}\right\}$

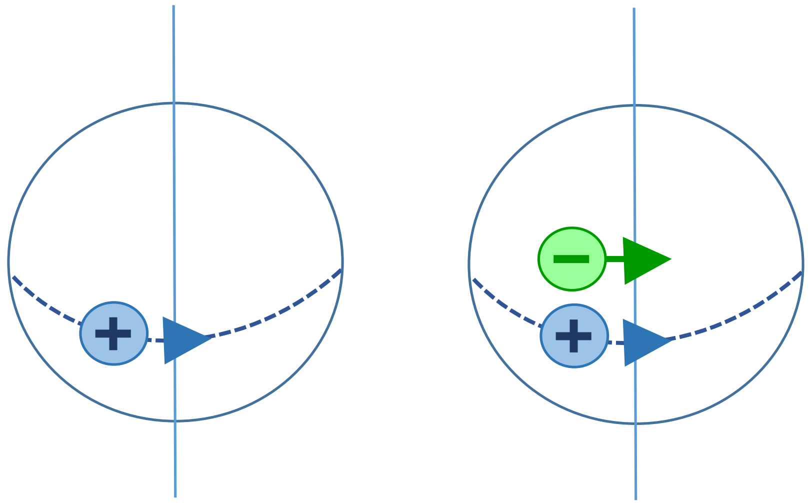
$$\vec{J} = \int n_s m(\vec{v} - \vec{v_0})\vec{r}dv \qquad J = \frac{2mc}{e}M$$

$$\vec{p_A} = \frac{n_s|e|}{c}\vec{A} - \frac{n_s|e|}{c}\vec{A} = 0$$

$\vec{p}$ = “не-сп импульс” + “вклад приповерхностных сп-электронов”

Момент Лондона

$$\vec{\omega} \Rightarrow \vec{j} \Rightarrow \vec{B}(t) \Rightarrow \vec{E}$$



Из уравнений Лондона:

$$\oint \vec{p}_s d\vec{l} = \oint \left(m\vec{v}_s + e\vec{A}\right) d\vec{l} = \frac{nh}{2}$$

$$\vec{B}_{equal} = -\frac{2m}{e}\vec{\Omega}$$

Из уравнений Гинзбурга-Ландау:

$$\frac{m}{e^2 n_s}\oint_\Gamma \vec{j}d\vec{l} = \frac{nh}{2e} - \int_{S_\Gamma} \vec{B}d\vec{s} - \frac{2m}{e}\vec{\Omega}\vec{S}_\Gamma$$

Толстое кольцо $\Rightarrow$ $\vec{j} = 0$, $\vec{B} = 0$, момент Лондона

Тонкое кольцо $\Rightarrow$ для каждого целого n есть Ω_n, соответствующее нулевому потоку.
Разность соответствующих частот:

$$\frac{h}{2\pi m} = 2S_\Gamma \Delta\nu$$

Момент Лондона: определение массы куперовской пары

Определение:

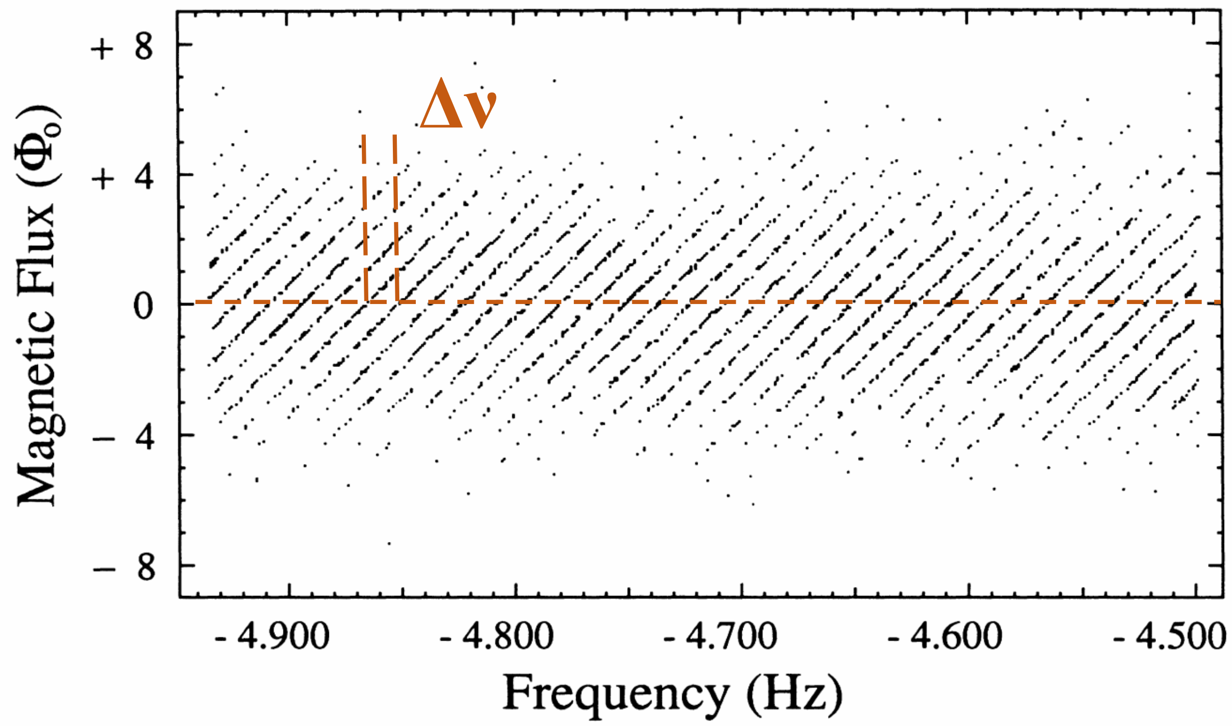
$$m^*\vec{v} = \hbar\nabla\varphi - \frac{e^*}{c}\vec{A}$$

Причины отклонений от $2m_e$:
- кинетическая энергия пары
- изменение внутреннего электро-статического потенциала при вращении => изменение $\vec{A}$

Определение из наблюдаемого:

$$m^*\vec{v} + \frac{e^*}{c}\vec{A} = m'\vec{v} + \frac{e^*}{c}\overrightarrow{A_{obs}}$$

$$\frac{\hbar}{m'} = 2S\Delta\nu \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2m_e} \approx 1.000084$$



J. Tate, B. Cabrera, S. Felch, and J. Anderson, "Precise determination of the cooper-pair mass", *Physical Review Letters*, vol. 62, no. 8, pp. 845–848, 1989.

J. Tate, B. Cabrera, S. Felch, and J. Anderson, "Determination of the cooper-pair mass in niobium", *Physical Review B*, vol. 42, no. 13, pp. 7885–7893, 1990.

Момент Лондона: термодинамический и микроскопический подход

$$\mathbf{B} = -[2m_e(1+\zeta)c/e]\mathbf{\Omega}$$

Микроскопические теории:

$$\zeta \approx (v_F/c)^2 \approx 2\times 10^{-4}$$

Термодинамические теории:

$$\zeta = \tilde{\mu}/c^2 \approx -10^{-10}$$

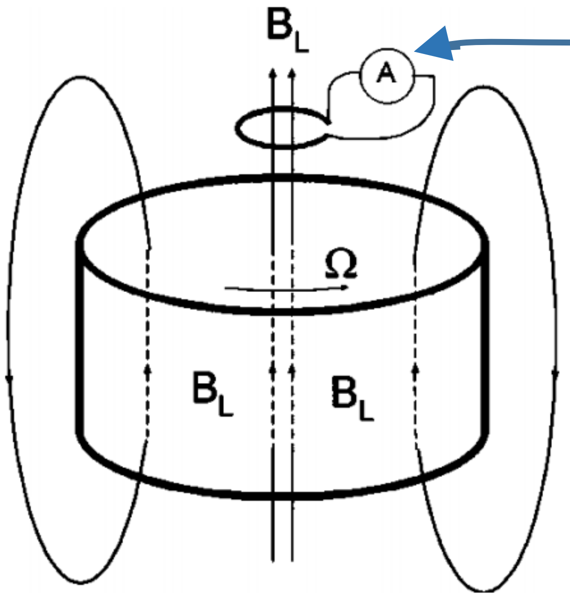
μ_-, μ_+, μ, $\Delta\Phi$ – энергия, необходимая
для переноса с бесконечности в данную точку
электрона, иона, единичной массы
и единичного заряда.

$$\mu = c^2 + \tilde{\mu}$$

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$$

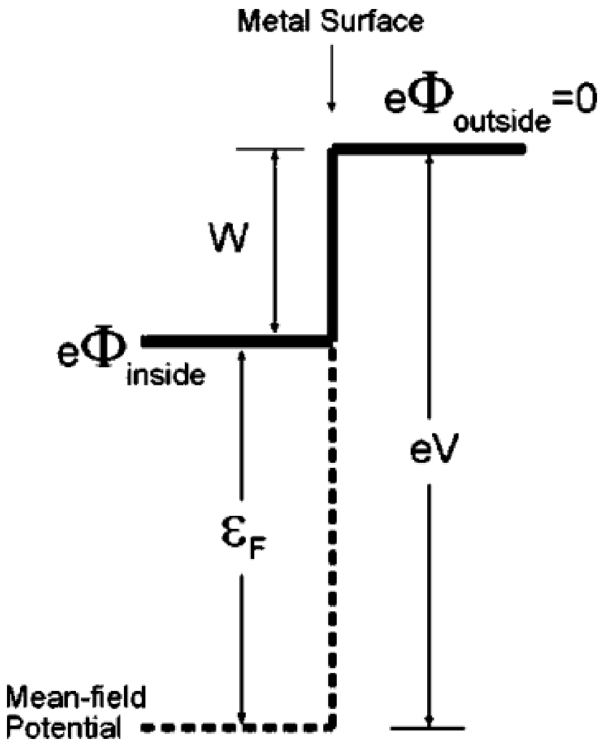
Вклад в поток: момент Лондона
и «двойной слой»: $\longrightarrow$ $T > T_c$

$$\Delta\mathbf{A} = -(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\Delta\Phi/c$$



Y. Jiang and M. Liu, "Rotating superconductors and the london moment: Thermodynamics versus microscopics", *Physical Review B*, vol. 63, no. 184506, 2001.

Момент Лондона: термодинамический и микроскопический подход



$$W-\varepsilon_F=eV \qquad W=\tilde{\mu}_-$$

Если ΔΦ – потенциал, в котором находятся сверх-электроны, создаваемые *всеми распределениями зарядов: поверхностными диполями, неоднородностями заряда атомных ядер и валентных электронов…*

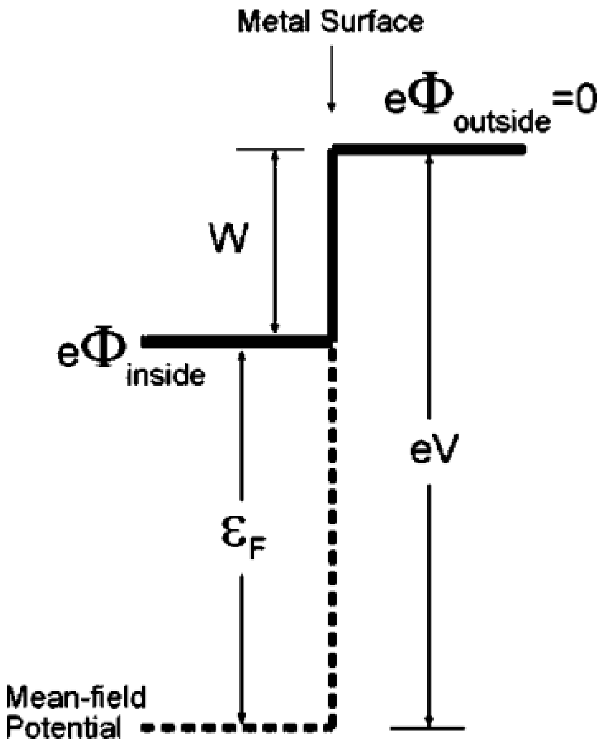
$$V=\Delta\Phi$$

$$\zeta(m_e c^2)=\tilde{\mu}_- - e\Delta\Phi = W-eV=\varepsilon_F$$

$$\zeta=\frac{1}{2}(v_F/c)^2\approx 1.8\times 10^{-4}$$

ε_F – энергия Ферми
W – работа выхода
eΦ – макроскопический электростатический потенциал
eV – потенциал среднего поля

Момент Лондона: термодинамический и микроскопический подход



$\Delta\Phi$ – потенциал, содержащий вклад всех других электронов, включая сверхпроводящие:

Термодинамическое определение потенциала $\Delta\Phi$:

$$W = \tilde{\mu}_- = e\Delta\Phi$$

Вместо: $V = \Delta\Phi$

$$m_{obs} = (1+\zeta)(1-\alpha)m_e$$

$$(m_{obs}/m_e) - 1 = \zeta - \alpha$$

α – вклад «двойного слоя», определяется работой выхода

ζ – определяется химическим потенциалом

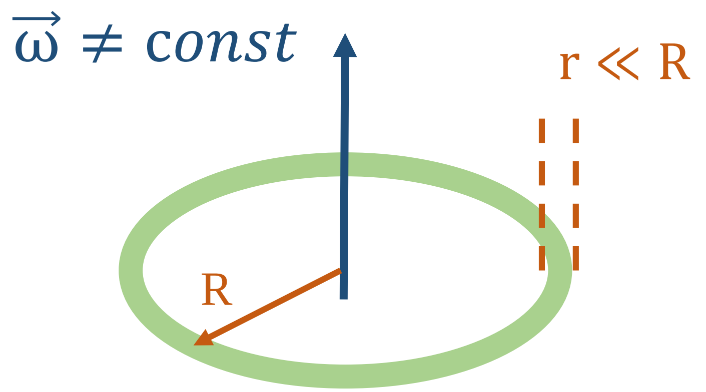
ε_F – энергия Ферми

W – работа выхода

eΦ – макроскопический электростатический потенциал

eV – потенциал среднего поля

Электронно-инерционные эффекты



L_s – магнитная индуктивность кольца

$L_k = \frac{mc^2 l}{Se^2 n^-}$ – кинетическая индуктивность

$T \to T_c \;\Rightarrow\; n_- \to 0 \;\Rightarrow$ может стать $L_k > L_s$

Разгон: $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} L_m \frac{dI^+}{dt} = \frac{1}{c} L_m Sen^+ \frac{dv}{dt}$ $\quad I^- = -Sen^+ u$

$$I^-{}_k = -\frac{L_s}{L_k + L_s} I^+{}_k \qquad I = I^-{}_k + I^+{}_k = I^+{}_k \frac{L_k}{L_k + L_s}$$

$L_k \ll L_s \;\Rightarrow\; I_k^- = -I_k^+,\;\; I_k = 0,\; \vec{B} \approx 0$

$L_k \gg L_s \;\Rightarrow\; I_k = I_k^+,\;\; \vec{B} \neq 0$

$$I = \frac{sev_0 n^-}{1 + L_s\left(\frac{se^2 n^-}{2\pi R mc^2}\right)} \to 0 \quad \text{при } T \to T_c$$

Торможение: сначала $I_a^- = -I_a^+ = -Sen^+ v_0$

$$I_k = I_k^- \qquad I_k^- = -I_a^+ \frac{L_k}{L_k + L_s}$$

$L_k \ll L_s \;\Rightarrow\; I_k = 0,\; \vec{B} \approx 0$

$L_k \gg L_s \;\Rightarrow\; I_k = -I_a^+,\;\; \vec{B} \neq 0$

$$I = \frac{sev_0 n^-}{1 + L_s\left(\frac{se^2 n^-}{2\pi R mc^2}\right)}$$

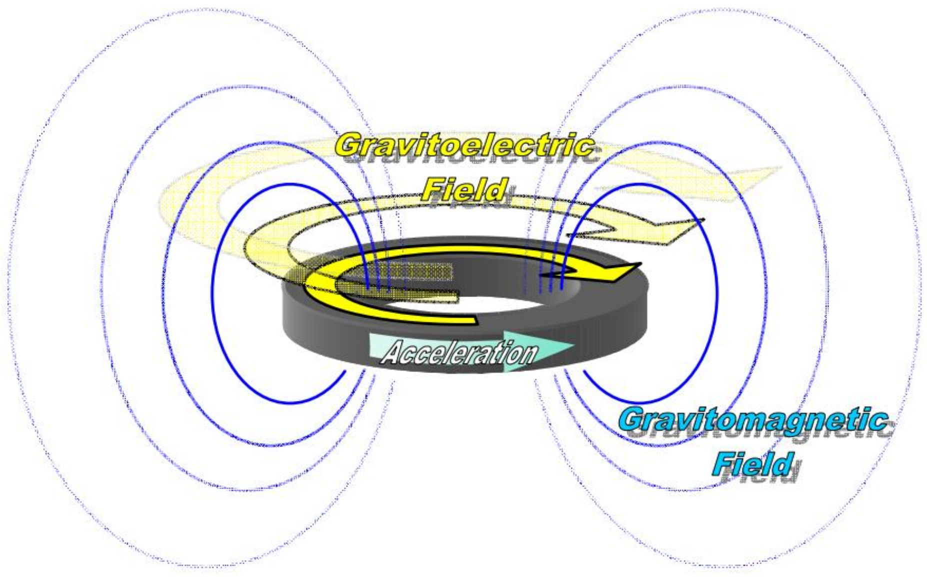
Н. Пенин, «Инерция электронов в сверхпроводящем кольце при неравномерном вращении», *Физика твёрдого тела*, т. 38, № 5, с. 1493—1499, 1996.

Гравитомагнитный эффект Лондона

$$\oint \vec{p}_s d\vec{l} = \oint \left(m\vec{v}_s + e\vec{A}\right) d\vec{l} = \frac{nh}{2}$$

$$\vec{B}_{equal} = -\frac{2m}{e}\vec{\Omega}$$

$\vec{g}$ – гравитационное поле
$\overrightarrow{B_g}$ – гравитационное поле «магнитного типа»
$\overrightarrow{A_g}$ – гравитомагнитный векторный потенциал



$$m\overrightarrow{v_2} = m\overrightarrow{v_2} - \int m\,\vec{g}dt$$

$$rot(\vec{g}\,) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{B_g}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{B_g} = rot\left(\overrightarrow{A_g}\right)$$

$$rot(\vec{g}\,) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\left(rot\left(\overrightarrow{A_g}\right)\right)}{\partial t}$$

$$\vec{g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A_g}}{\partial t} + \nabla\chi$$

$$m\overrightarrow{v_2} = m\overrightarrow{v_2} - \frac{m}{c}\overrightarrow{A_g}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{m}{c}\overrightarrow{A_g} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

D.K. Ross, J. Phys. A: Math. Gen. 16 1331 (1983)
“The London equations for superconductors in a gravitational field”

Гравитомагнитный эффект Лондона

В рассмотрение включены $\overrightarrow{A_g}$ и $\overrightarrow{B_g}$
– гравитомагнитный векторный потенциал
и гравитомагнитное поле:

$$\oint \vec{p}_s d\vec{l} = \oint \left(m\vec{v}_s + e\vec{A} + m\vec{A}_g\right) d\vec{l} = \frac{nh}{2}$$

$$\frac{m}{e^2 n_s} \oint_\Gamma \vec{j} d\vec{l} = \frac{nh}{2e} - \int_{S_\Gamma} \vec{B} d\vec{s} - \frac{m}{e} \int_{S_\Gamma} \vec{B}_g d\vec{s} - \frac{2m}{e} \vec{\Omega} \vec{S}_\Gamma$$

Толстое кольцо ⇒
модификация Лондоновского поля:

$$\vec{B} = -\frac{2m}{e}\vec{\Omega} - \frac{m}{e}\vec{B}_g$$

$$\vec{B}_g = -\frac{4\pi G}{c^2 \mu_0} \frac{m}{e} \vec{B} = -7.41 * 10^{-21} * \frac{m}{e} \vec{B}$$

Поток гравитомагнитного поля, в отличие от магнитного, содержит вклад «решётки» ⇒ из равенства нулю тока следует не равенство нулю потока, а:

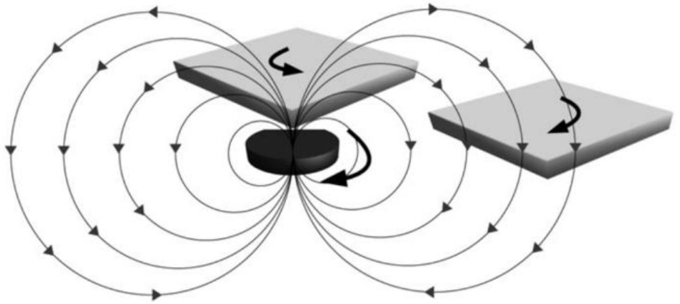
$$\frac{h}{2\pi m} = 2S\left(\Delta\nu + \frac{\Delta B_{g,\ \text{решётка}}}{2\pi}\right)$$

вместо $$\frac{h}{2\pi m} = 2S_\Gamma \Delta\nu$$

$$\frac{m}{2m_e} \approx 1.000084 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_g = \vec{\omega} \cdot 1.84 \times 10^{-4}$$

M. Tajmar, C. de Matos, Physica C 385 (2003) 551.
M. Tajmar, C. de Matos, Physica C 420 (2005) 56.

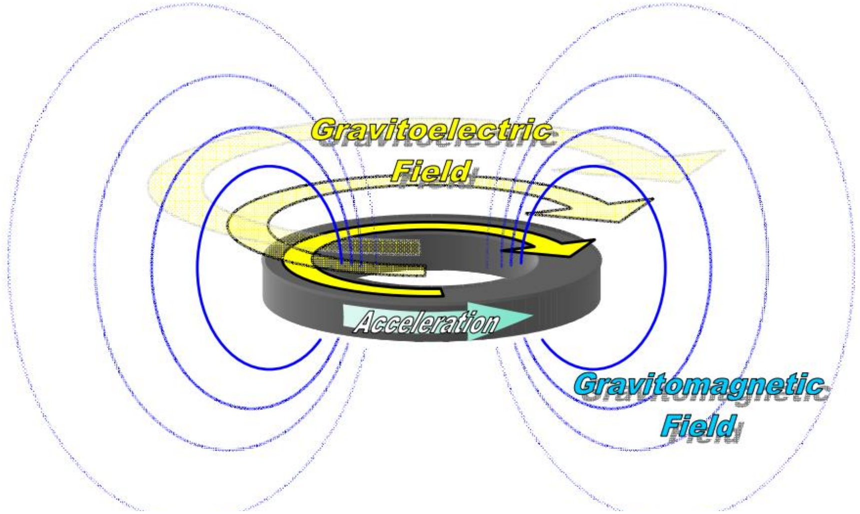
Эффект Лензе – Тирринга

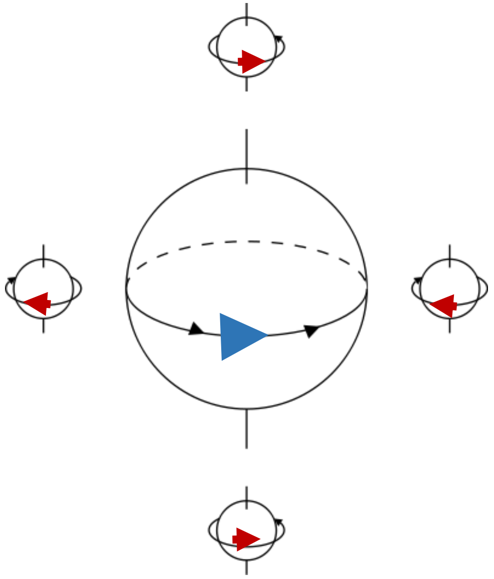


$$\mathbf{\Omega}' = \frac{GI}{c^2R^3}\left[\frac{3\mathbf{R}}{R^2}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{R}) - \mathbf{\Omega}\right]$$

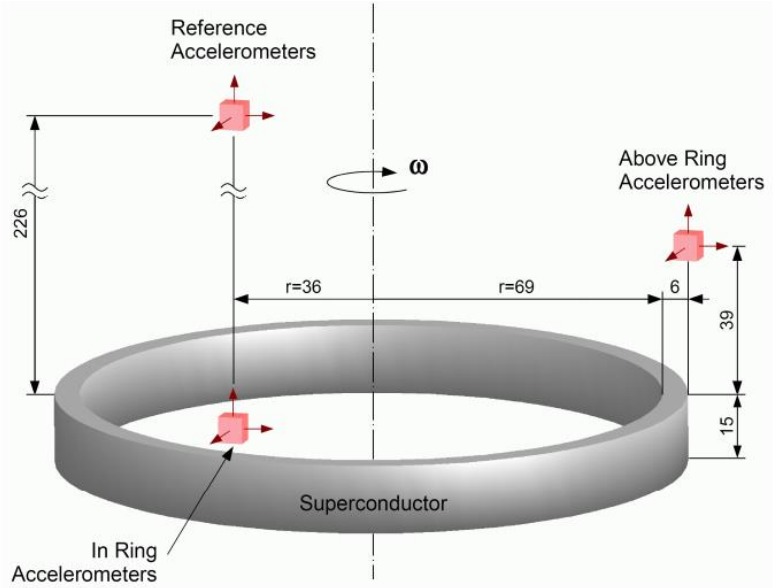
$$B_g^* = 2\Omega\frac{\rho^*}{\rho}$$

$$g = -\dot{B}_g\,\frac{r}{2}.\hat{\varphi} = -\frac{\rho^*}{\rho}\,r\dot{\omega}.\hat{\varphi}$$

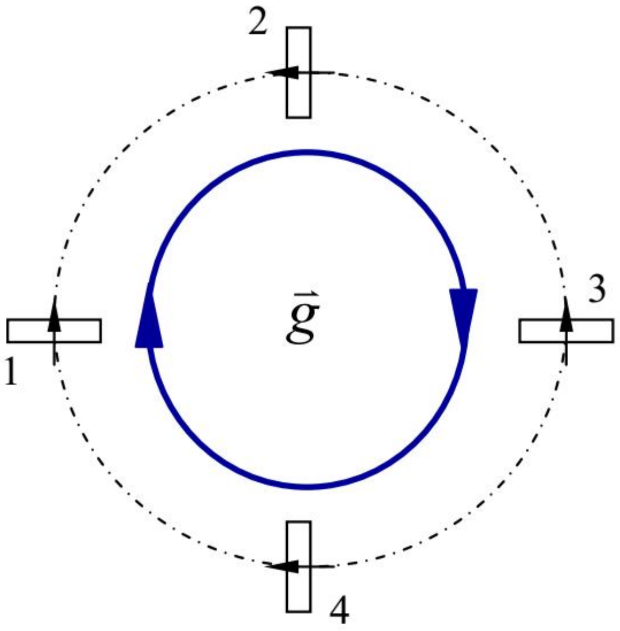




M. Tajmar, F. Plesescu, B. Seifert, K. Marhold, Measurement of gravitomagnetic and acceleration fields around rotating superconductors, AIP Conference Proceedings 880 (2007) 1071.

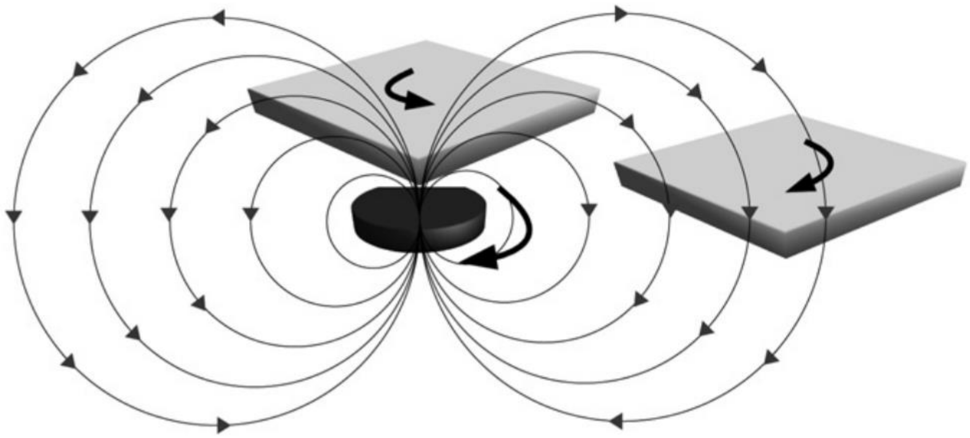


(a) Single-Configuration (all Measures in mm).

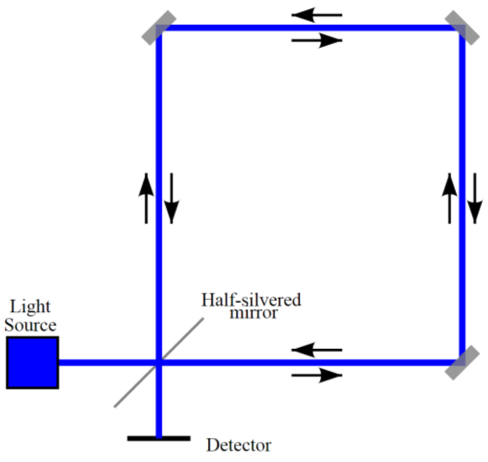


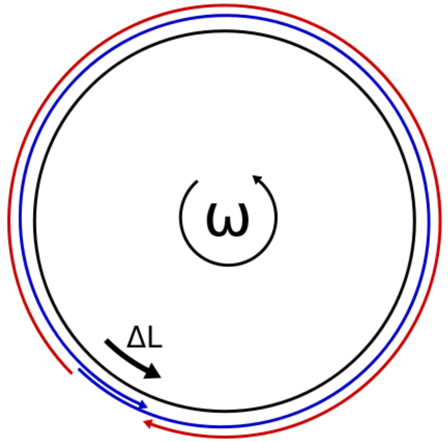
(b) Curl-Configuration.

Эффект Лензе – Тирринга



Эффект Саньяка:





$$\mathbf{\Omega}' = \frac{GI}{c^2R^3}\left[\frac{3\mathbf{R}}{R^2}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{R}) - \mathbf{\Omega}\right]$$

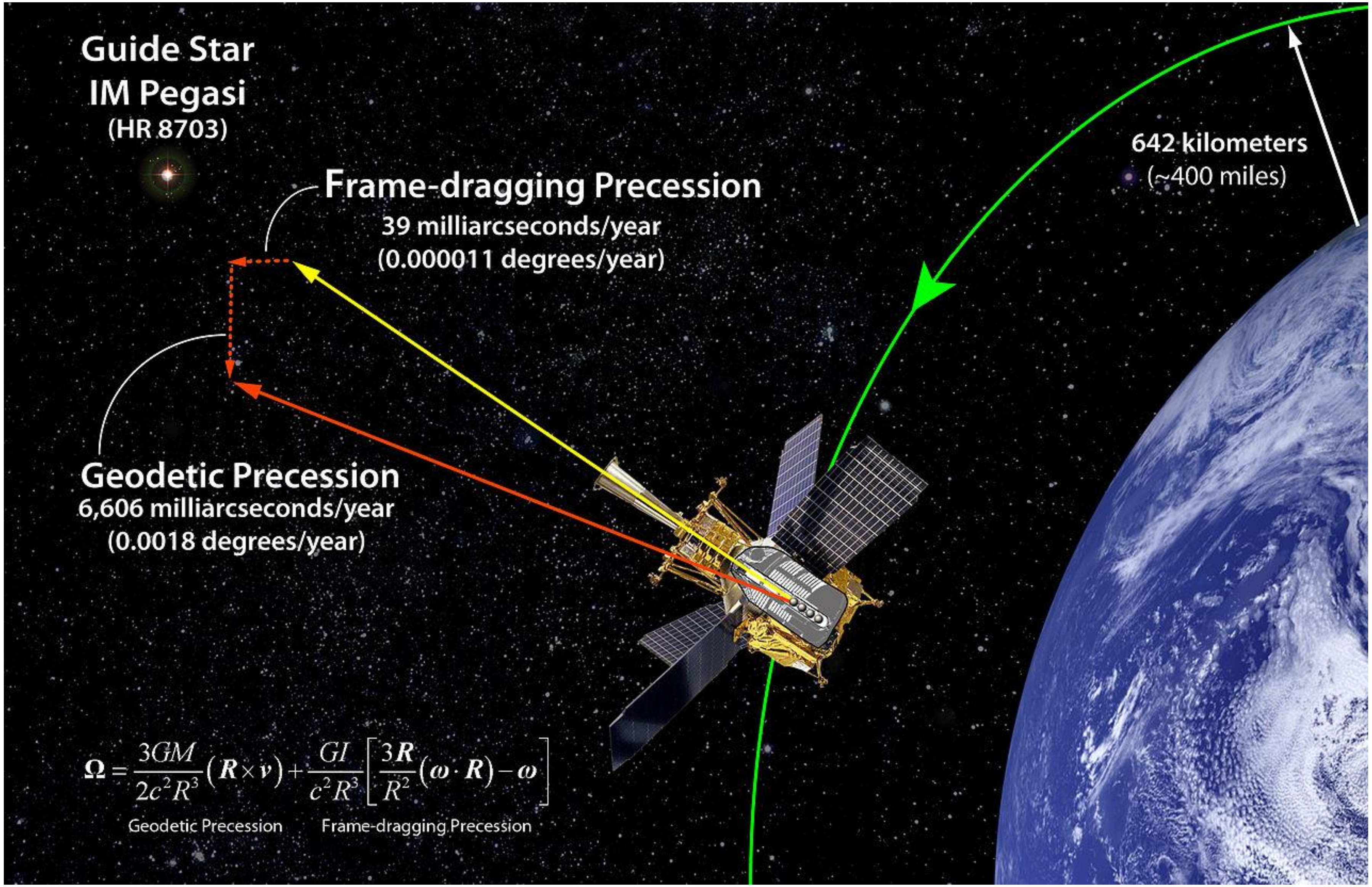
$$B_g^* = 2\Omega\frac{\rho^*}{\rho}$$

$$f_s = \frac{4\vec{A}\vec{\Omega}}{\lambda L} \quad \Rightarrow \quad \Delta f_s = \frac{4AB'_g}{\lambda P}$$

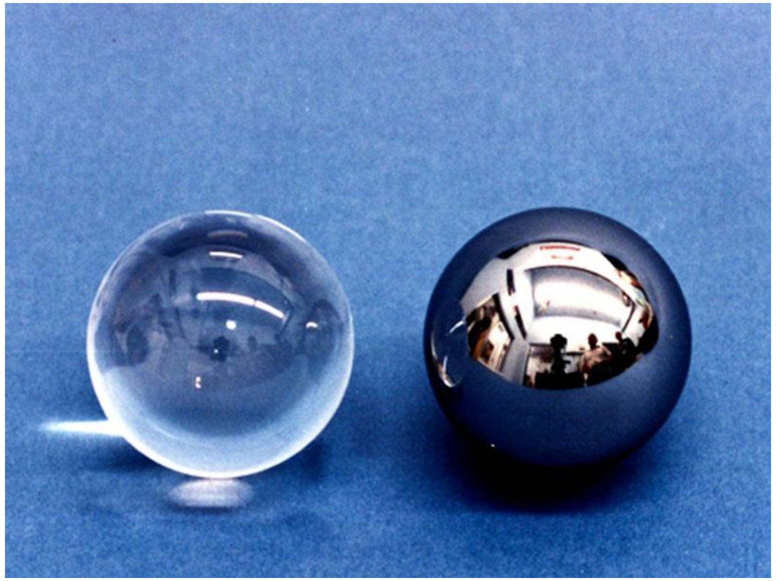
$$\Delta f_s = 4.81 \times 10^{-5}\ \omega\ \mathrm{Hz}$$

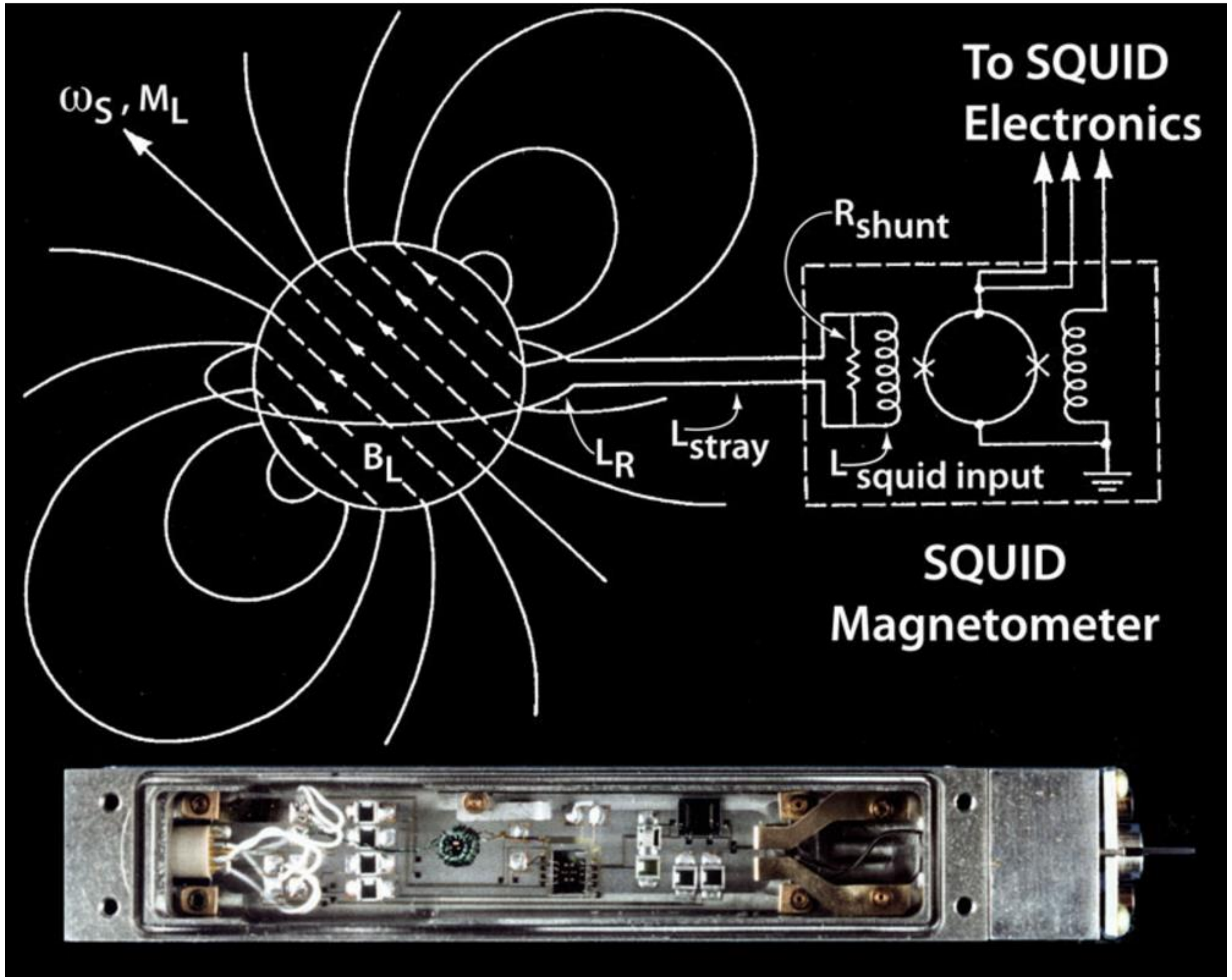
R. Graham, R. Hurst, R. Thirkettle, C. Rowe, and P. Butler, "Experiment to detect frame dragging in a lead superconductor", *Physica C*, no. 468, pp. 383–387, 2008.

Gravity Probe B: 2004-2005



Gravity Probe B





Геодезическая прецессия:

$(-6601.8 \pm 18.3)\,\frac{milliarcsecond}{year}$ (−6606.1±0.28%)

Увлечение системы отсчёта:

$(-37.2 \pm 7.2)\,\frac{milliarcsecond}{year}$ (−39.2±0.19%)

Спасибо за внимание!