

# Майорановские фермионы в полупроводниковых проводах с индуцированной сверхпроводимостью

Копасов А. А. (аспирант 2 года)  
руководитель: д.ф.-м.н. Мельников А. С.

25 мая 2017 г.

1. Бесспиновая  $p$  - сверхпроводимость (модель Китаева)
2. Минимальная модель для полупроводникового провода с индуцированной сверхпроводимостью
3. Некоторые существующие реализации системы
4. Зависимость энергетической щели в сверхпроводнике от параметров провода (теория Макмиллана)
5. Список литературы

# 1. Модель Китаева ( $k \rightarrow 0$ )

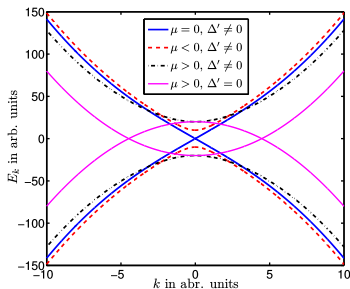
$$\mathcal{H} = \int dx \left\{ \psi^\dagger(x) \xi_p \psi(x) + \Delta' [\psi^\dagger(x) \partial_x \psi^\dagger(x) + \text{h.c.}] \right\}, \quad (1)$$

где  $\xi_p = (p^2/2m - \mu)$ . Гамильтониан БДЖ в базисе  $\Psi(x) = [\psi_\uparrow(x), \psi_\downarrow(x), \psi_\downarrow^\dagger(x), -\psi_\uparrow^\dagger(x)]^\text{T}$ :

$$H = \begin{pmatrix} \xi_p & -i\Delta'p \\ i\Delta'p & -\xi_p \end{pmatrix} = \xi_p \tau_z + \Delta' p \tau_y. \quad (2)$$

Диагонализуя гамильтониан  $\det(H - E) = 0$ , получаем

$$E_k = \pm \sqrt{\xi_k^2 + \Delta'^2 k^2}. \quad (3)$$



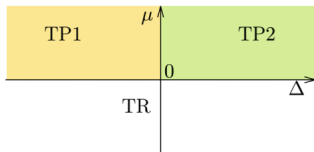
Спектр БДЖ гамильтониана  $p$  - сверхпроводника.

# 1. Симметрия БдЖ гамильтониана и топологические фазы

Симметрия частица - дырка:  $\{H, CT\} = 0$ , где  $C = -i\tau_y$  - зарядовое сопряжение,  $T = i\sigma_y K$  - оператор инверсии времени,  $K$  - комплексное сопряжение.

Пусть  $\{\Phi_n(x)\}$  - набор собственных функций  $H$ , тогда

$$HCT\Phi_n = -CTH\Phi_n = -CTHE_n\Phi_n = -E_nCT\Phi_n . \quad (4)$$



**Fig. 2.1** The phase diagram of a one-dimensional  $p$ -wave superconductor as function of  $p$ -wave pairing strength  $\Delta'$  and chemical potential  $\mu$ . There are topological superconducting phases for  $\mu > 0$ , while the system is topologically trivial for  $\mu < 0$ . The topological phases at positive  $\mu$  differ in their winding numbers depending on the sign of  $\Delta'$ .

# 1. Характеристика топологических фаз

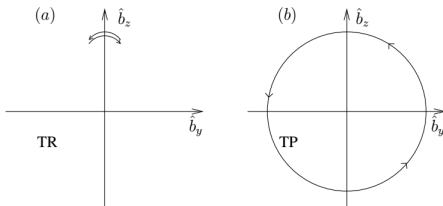
Перепишем БдЖ гамильтониан  $H = (\xi_k \tau_z + \Delta' k \tau_y)$  в виде:

$$H_k = \mathbf{b}_k \boldsymbol{\tau} , \quad (5)$$

где

$$(b_k)_x = 0 ; (b_k)_y = \Delta' k ; (b_k)_z = \xi_k .$$

Рассмотрим отображение  $k \in \mathbb{R}$  на единичный вектор  $\hat{\mathbf{b}}_k = \mathbf{b}_k / |\mathbf{b}_k|$ . Топологический инвариант - число оборотов  $\hat{\mathbf{b}}_k$  в плоскости  $yz$ .



**Fig. 2.2** Illustration of the mapping  $k \rightarrow \hat{\mathbf{b}}_k$  in symmetry class BDI. (a) Trivial or nontopological phase. (b) Topological phase.

## 1. Связанные состояния на доменной границе

Предположим, что  $\mu$  меняется линейно вблизи доменной границы<sup>1</sup>:

$$\mu(x) = \alpha x. \quad (6)$$

Вблизи  $\mu = 0$  можно пренебречь слагаемым  $p^2/2m$ . В результате получим гамильтониан Дирака с неоднородной массой:

$$H = -\alpha x \tau_z + \Delta' p \tau_z. \quad (7)$$

Далее вычислим  $H^2$ :

$$H^2 = (\alpha x)^2 + (\Delta' p)^2 - \Delta' \alpha \tau_x. \quad (8)$$

Спектр собственных состояний  $H^2$ :

$$(E_n^\pm)^2 = 2\Delta' \alpha \left( n + \frac{1}{2} \right) \mp \Delta' \alpha. \quad (9)$$

Решение уравнения БДЖ, соответствующее  $E_0^+ = 0$ :

$$\langle x | n = 0, + \rangle = u_0(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_0(x) \propto \exp(-\alpha x^2/2|\Delta'|). \quad (10)$$

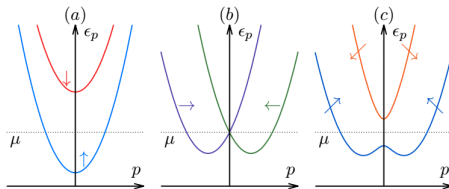
---

<sup>1</sup>Задача: вычислить спектр подщелевых состояний в модели  $\mu(x) = \alpha \operatorname{sign}(x)$

## 2. Минимальная модель для полупроводникового провода с индуцированной сверхпроводимостью

Гамильтониан предлагаемой системы (наведенная сверхпроводимость  $s$  типа)<sup>2</sup>:

$$H = \left( \frac{p^2}{2m} + up\sigma_x - \mu \right) \tau_z - B\sigma_z + \Delta\tau_x. \quad (11)$$



**Fig. 4.1** Normal-state dispersions of the quantum wire in (a) the Kitaev limit, (b) the topological insulator limit without Zeeman field, and (c) the topological insulator limit with Zeeman field.

Предел Китаева  $B \gg mu^2$ :  $E_p = (p^2/2m) \pm B$ .

Предел топологического изолятора  $B \ll mu^2$ :  $E_p = (p \pm mu)^2/2m - mu^2/2$ .

<sup>2</sup>1. Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **105**, 177002 (2010). 2. R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **105**, 077001 (2010).

## 2. Предел Китаева $B \gg mu^2$ , теория возмущений

Будем отсчитывать химический потенциал от дна  $\uparrow$  подзоны:

$$H = \left( \frac{p^2}{2m} - (B + \mu) \right) \tau_z + \dots \rightarrow \left( \frac{p^2}{2m} - \mu \right) \tau_z + \dots . \quad (12)$$

В отсутствие спин-орбитального взаимодействия:

$$|e\rangle = [1, 0, 0, 0]^T, \quad |h\rangle = [0, 0, 0, 1]^T . \quad (13)$$

Легко показать, что  $\langle e | \Delta \tau_x | e \rangle = \langle h | \Delta \tau_x | e \rangle = \langle e | \Delta \tau_x | h \rangle = \langle h | \Delta \tau_x | h \rangle = 0$ . В первом порядке по спин-орбитальному взаимодействию:

$$|e\rangle = [1, -up/2B, 0, 0]^T, \quad |h\rangle = [0, 0, -up/2B, 1]^T . \quad (14)$$

Ненулевые матричные элементы  $\Delta \tau_x$ :

$$\langle h | \Delta \tau_x | e \rangle = \langle e | \Delta \tau_x | h \rangle = -\frac{up}{B} \Delta . \quad (15)$$

В результате<sup>3</sup>:

$$H \approx \left( \frac{p^2}{2m} - \mu \right) \tau_z - \frac{up}{B} \Delta \tau_x . \quad (16)$$

---

<sup>3</sup>Рассматривали:  $H = (p^2/2m - \mu) \tau_z + \Delta' p \tau_y$ .

### 3. Полупроводниковые провода с индуцированной сверхпроводимостью

Эффект Зеемана  $[\Gamma\hat{\sigma}_z] +$  спин-орбитальное взаимодействие  $[\alpha_R(\mathbf{n} \times \mathbf{p})\hat{\sigma}] +$  сверхпроводимость  $s$  типа = бесспиновая  $p$  - волновая сверхпроводимость.

Преимущества предложения:

1. Хорошо изученные материалы: InAs, InSb с сильным спин-орбитальным взаимодействием и большим  $g$  фактором [ $g_{\text{InAs}} \sim 10 - 25^*$  и  $g_{\text{InSb}} \sim 20 - 70^{**}$ ],  $s$  - волновые сверхпроводники Al или Nb
2. Контакты с такими материалами позволяют добиться достаточно большого значения наведенной щели  $\Delta^{***}$

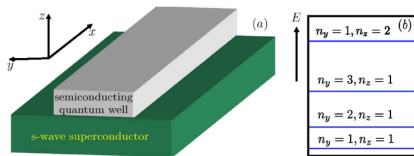


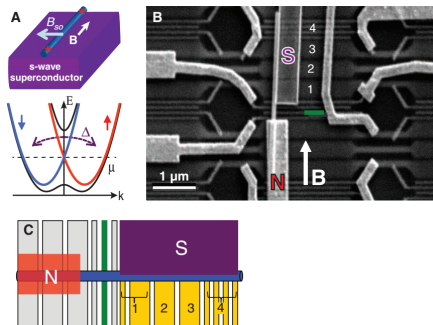
FIG. 1 (color online). (a) Schematic plot of the quasi-1D nanowire proximity-coupled with an  $s$ -wave SC. The rectangular quantum well has the dimensions  $L_z$ ,  $L_y$ , and  $L_x$ :  $L_z \ll L_y \ll L_x$ . The nanowire can be top gated to control chemical potential in it. The method for fabricating the proposed quantum well heterostructure based on InAs has been demonstrated; see, e.g., Refs. [12,18]. (b) Schematic plot of the lowest energy subbands due to the transverse confinement.

\* V. Aleshkin, V. Gavrilenko, A. Ikonnikov, S. Krishtopenko, V. Sadofyev, and K. Spirin, Semiconductors **42**, 828 (2008).

\*\* H. A. Nilsson, P. Caroff, C. Thelander, M. Larsson, J. B. Wagner, L.-E. Wernersson, L. Samuelson, and H. Q. Xu, Nano Lett. **9**, 3151 (2009).

\*\*\* Y.J. Doh, J. van Dam, A. Roest, E. Bakkers, L. Kouwenhoven, and S. D. Franceschi, Science **309**, 272 (2005).

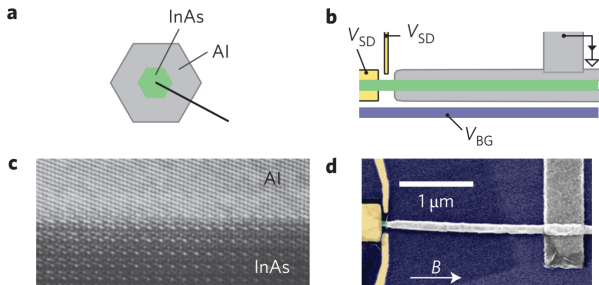
# 3. Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices<sup>4</sup>



**Fig. 1.** (A) Outline of theoretical proposals. (Top) Conceptual device layout with a semiconducting nanowire in proximity to an s-wave superconductor. An external  $B$  field is aligned parallel to the wire. The Rashba spin-orbit interaction is indicated as an effective magnetic field,  $B_{so}$ , pointing perpendicular to the nanowire. The red stars indicate the expected locations of a Majorana pair. (Bottom) Energy,  $E$ , versus momentum,  $k$ , for a 1D wire with Rashba spin-orbit interaction, which shifts the spin-down band (blue) to the left and the spin-up band (red) to the right. Blue and red parabolas are for  $B = 0$ ; black curves are for  $B \neq 0$ , illustrating the formation of a gap near  $k = 0$  of size  $E_g$  ( $\mu$  is the Fermi energy with  $\mu = 0$  defined at the crossing of parabolas at  $k = 0$ ). The superconductor induces pairing between states of opposite momentum and opposite spin, creating a gap of size  $\Delta$ . (B) Implemented version of theoretical proposals. Scanning electron microscope image of the device with normal (N) and superconducting (S) contacts. The S contact only covers the right part of the nanowire. The underlying gates, numbered 1 to 4, are covered with a dielectric. [Note that gate 1 connects two gates, and gate 4 connects four narrow gates; see (C).] (C) (Top) Schematic of our device. (Bottom) illustration of energy states. The green rectangle indicates the tunnel barrier separating the normal part of the nanowire on the left from the wire section with induced superconducting gap,  $\Delta$ . [In (B), the barrier gate is also shown in green.] An external voltage,  $V$ , applied between N and S drops across the tunnel barrier. Red stars again indicate the idealized locations of the Majorana pair. Only the left Majorana is probed in this experiment.

<sup>4</sup>V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, *Science* **336**, 1003-1007 (2012)

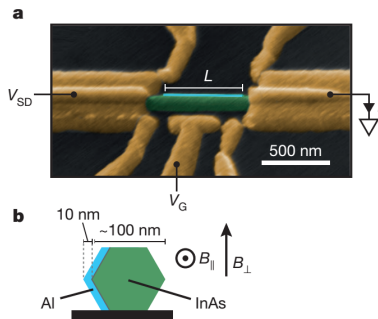
### 3. Hard gap in epitaxial semiconductor - superconductor nanowires<sup>5</sup>



**Figure 1 | Epitaxial full-shell device and hard induced gap.** **a**, Schematic cross-section of epitaxial full-shell nanowire with InAs core (green) and Al shell (grey). **b**, Measurement set-up, showing Ti/Au leads (yellow), InAs nanowire (green) and Al shell (grey). **c**, Transmission electron micrograph of epitaxial N/S interface along the cut in **a**. **d**, Scanning electron micrograph of lithographically similar device (false colour).

<sup>5</sup>W. Chang, S. M. Albrecht, T. S. Jespersen, F. Kuemmeth, P. Krogstrup, J. Nygard, and C. M. Marcus, *Nature Nanotechnology* **10**, 232-236 (2015).

### 3. Exponential protection of zero modes in Majorana islands<sup>6</sup>



**Figure 1 | Majorana island device.** **a**, Electron micrograph (false colour) of a device that is lithographically similar to the measured devices. Yellow, Ti/Au contacts; green, InAs nanowire; light blue, two-facet Al shell (of length  $L$ );  $V_{SD}$ , applied voltage bias;  $I$ , measured current;  $V_G$ , gate voltage. **b**, Cross-section of a hexagonal InAs nanowire showing the orientation of the Al shell and field directions  $B_{\parallel}$  and  $B_{\perp}$ .

<sup>6</sup>S. M. Albrecht, A. P. Higginbotham, M. Madsen, F. Kuemmeth, T. S. Jespersen, J. Nygard, P. Krogstrup, and C. M. Marcus, *Nature* **531**, 206-209 (2016).

## 4. Микроскопическая теория эффекта близости

Совместно с И. М. Хаймовичем и А. С. Мельниковым.

Гамильтониан системы<sup>7</sup>:

$$H = H_s + H_w + H_t . \quad (17)$$

$$H_s = d_s R_w \int dy d\varphi \left\{ \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{R}) \xi_s(\mathbf{R}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{R}) + \left[ \Delta(\mathbf{R}) \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{R}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{R}) + \text{h.c.} \right] \right\} , \quad (18)$$

$$H_w = S_w \int dy \sum_{\sigma\sigma'} a_{\sigma}^{\dagger}(y) \left[ \xi_w(y) + E_c - i\alpha\sigma^x \partial_y + V_y \sigma^y \right] a_{\sigma'}(y) , \quad (19)$$

$$H_t = \sqrt{d_s R_w S_w} \int dy d\varphi \sum_{\sigma} \left[ \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\varphi, y) T(\varphi, y) a_{\sigma}(y) + \text{h.c.} \right] . \quad (20)$$

Модель некогерентного туннелирования:

$$\overline{T(\varphi, Y) T(\varphi', Y')} = t^2 \ell_c \delta(Y - Y') \delta(\varphi - \varphi') , \quad (21)$$

---

<sup>7</sup>W. L. McMillan, Phys. Rev. **175**, 537-542 (1968).

## 4. Уравнения Горькова

$$\begin{aligned} [-i\omega\check{\tau}_z + \xi_w + \alpha p_y \hat{\sigma}_x + V_y \hat{\sigma}_y \check{\tau}_z - \check{\Sigma}_w^{(d)}] \check{G}_w + \check{\Delta}_w \check{G}_w \check{\tau}_z &= \check{1} , \\ [-i\omega\check{\tau}_z + \xi_s - \check{\Sigma}_s^{(d)}] \check{G}_s + \check{\Delta}_s \check{G}_s \check{\tau}_z &= \check{1} , \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\check{\Sigma}_w^{(d)} = \Gamma_s \text{diag}(\hat{g}_s, \hat{g}_s)$ ,  $\check{\Sigma}_s^{(d)} = \Gamma_w \text{diag}(\hat{g}_w, \hat{g}_w)$  и

$$\begin{aligned} \check{\Delta}_w &= \check{\tau}_z \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_s \hat{f}_s \\ \Gamma_s \hat{f}_s^\dagger & 0 \end{pmatrix} , \\ \check{\Delta}_s &= \check{\tau}_z \begin{pmatrix} 0 & \hat{\Delta} + \Gamma_w \hat{f}_w \\ \hat{\Delta}^\dagger + \Gamma_w \hat{f}_w^\dagger & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $\omega = 2\pi T(n + 1/2)$ ,  $\xi_w = p_y^2/2m_w - \mu + E_c$ ,  $m_w$  эффективная масса электрона в полупроводнике,  $\xi_s = (p_y^2 + k^2)/2m_s - \mu$ ,  $k$  импульс вдоль оболочки,

$$\begin{aligned} \check{g}_s &= \frac{1}{\pi} \int d\xi_s \check{G}_s(\xi_s) , \quad \check{g}_w = \frac{1}{\pi} \int dp_y \check{G}_w(p_y) , \\ \Gamma_s &= t^2 \ell_c R_w m_s / 2 , \quad \Gamma_w = t^2 \ell_c / 2 . \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (22) решались совместно с уравнением самосогласования на щель в сверхпроводнике:

$$\Delta^* = \frac{\lambda \pi T}{2} \sum_{\omega} \text{Tr} \left[ \hat{f}_s^\dagger (i \hat{\sigma}_y) \right] . \quad (25)$$

## 4. Зависимость $T_c(\mu)$

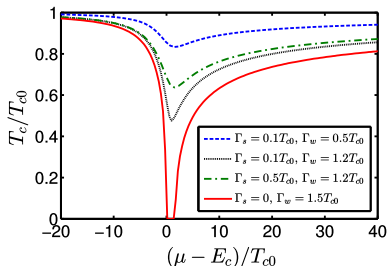
Уравнение на  $T_c$  в модели Макмиллана:

$$\ln \left( \frac{T_{c0}}{T_c} \right) = \frac{\Gamma_w}{\Gamma_w + \Gamma_s} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\Gamma_w + \Gamma_s}{2\pi T_c} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right) \right], \quad (26)$$

где  $\Gamma_w = t^2 \ell_c \nu_w(0)/2$  и  $\nu_w(0)$  -плотность состояний на уровне Ферми в проводе. Случай  $\Gamma_s = 0$  аналогичен сверхпроводнику с магнитными примесями. Учет зависимости плотности состояний от энергии в проводе дает:

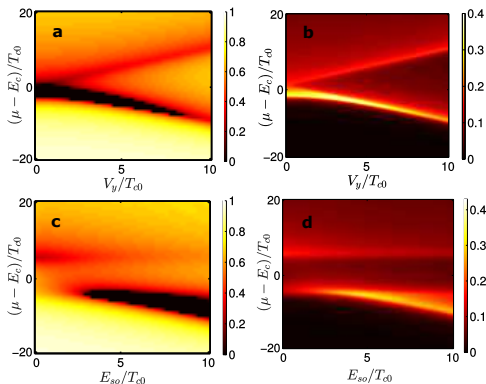
$$\lambda^{-1} = 2\pi T \sum_{\omega > 0} \frac{(1 + \Gamma_s/\omega)}{\omega \left[ 1 + \tilde{\Gamma}_w(\omega)/\omega + \Gamma_s/\omega \right]}, \quad (27)$$

$$\tilde{\Gamma}_w(\omega) = \Gamma_w \Re \sqrt{2m_w/[\mu - E_c + i(\omega + \Gamma_s)]}.$$



Критерий разрушения сверхпроводимости в оболочке ( $\Gamma_s = 0$ ):  $t^2 \ell_c \sqrt{m_w/2T_{c0}} \sim T_{c0}$ .

# 4. Зависимость $T_c(\mu, \alpha, V_y)$



(a) Color plot of the critical temperature of the shell  $T_c/T_{c0}$  as a function of the chemical potential in the wire  $(\mu - E_c)/T_{c0}$  and the Zeeman field  $V_y/T_{c0}$  calculated for  $\Gamma_s = 0.6T_{c0}$ ,  $\Gamma_w = 2T_{c0}$ , and  $E_{so} = 3T_{c0}$ . (b) Corresponding density of states in the wire in the normal state at the Fermi level  $\nu_w(0)$  in the units of  $\sqrt{m_w/2T_{c0}}$  as a function of the chemical potential  $(\mu - E_c)/T_{c0}$  and the Zeeman field  $V_y/T_{c0}$ . (c) Color plot of the critical temperature of the shell  $T_c/T_{c0}$  as a function of  $(\mu - E_c)/T_{c0}$  and  $E_{so}/T_{c0}$  calculated for  $\Gamma_s = T_{c0}$ ,  $\Gamma_w = 2T_{c0}$ , and  $V_y = 5T_{c0}$ . (d) Corresponding density of states in the wire in the normal state at the Fermi level  $\nu_w(0)$  in the units of  $\sqrt{m_w/2T_{c0}}$  as a function of  $(\mu - E_c)/T_{c0}$  and  $E_{so}$ . Here  $\Gamma_s = t^2 \ell_c R_w m_s / 2$ ,  $\Gamma_w = t^2 \ell_c \sqrt{m_w / 2T_{c0}}$ .

Статьи по тематике + следующие лекции:

Felix von Oppen, Yang Peng, Falko Pientka, *Topological superconducting phases in one dimension*, Oxford University Press (2014).

Спасибо за внимание!